2005 年度 冬学期 離散情報論 2005 年 10 月 3 日

Lecture 1 (辺彩色)

教員: 岩田 覚 助教授 文責: 小林 佑輔

本講義では主に離散最適化に関する話題を扱う．教科書は [3] である．

1 辺彩色

無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられたときに, 各枝に色を付けることを辺彩色という．ただし, 端点を共有する枝同士は異なる色を付けることとする．このとき, 最小の色数による辺彩色を求めることを考える．

辺彩色に必要な最小色数を γ とし, 頂点 $v \in V$ の次数を $d(v)$ とする．v に接続する枝はすべて異なる色が付けられているので, $\gamma \geq d(v)$, $\forall v \in V$ が成り立つ．すなわち, $d^* = \max\{d(v)|v \in V\}$ として, $\gamma \geq d^*$ が成り立つ．この不等式から, $\gamma = d^*$ という等式が予想されるが, これは一般グラフにおいては正しくない．例えば, 図 1 において, $\gamma = 3$, $d^* = 2$ である．

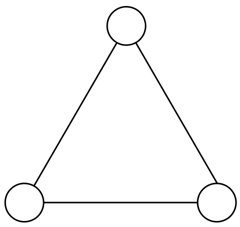

図 1: $\gamma = d^*$ の成り立たない例.

しかし, 2 部グラフにおいてはこの等式が成り立つことが知られている．

定理 1 (König, 1916)**.** *G が 2 部グラフならば, $\gamma = d^*$ が成り立つ．*

Proof. $M_1, M_2, \ldots, M_{d^*}$ を互いに素なマッチングで, 枝数の合計が最大なものとする．辺彩色を考えたときに, 同じ色の付いた枝の集合は, グラフのマッチングに対応しているので, $E = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{d^*}$ を示せばよい．枝が M_i の要素であることを, 枝の色が i であると呼ぶことにする．

$e \in E \setminus (M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{d^*})$ なる, u と v を結ぶ枝 e が存在すると仮定する．すると, u に接続する枝は e 以外に高々$d^* - 1$ 本しかないので, $1, 2, \ldots, d^*$ の中で, u に接続する枝に付いていない色 i が存在する．同様にして, v に接続する枝に付いていない色 j が存在する．

1. <u>$i = j$ のとき.</u> e を M_i に加えることができるので, $M_1, M_2, \ldots, M_{d^*}$ の最大性に矛盾.
2. <u>$i \neq j$ のとき.</u> $M_i \cup M_j \cup \{e\}$ を枝集合とする G の部分グラフ G' を考える．G' において各点の次数は 2 以下であるから, 各連結成分はパスかサイクルである．

   e を含むサイクルが存在するとすると, e 以外の枝は M_i の枝と M_j の枝が交互に現れ, また, e の両側の枝に付いた色が異なることから, このサイクルは奇数長さとなり, G が 2 部グラフであることに矛盾

する．よって e を含む連結成分はパスである．このパスの端の枝から順に, i, j の色が交互になるように色を付け直せば, より多くの枝の彩色が得られる．よって, $M_1, M_2, \ldots, M_{d^*}$ の最大性に矛盾する．

以上より, $E = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{d^*}$ である． □

この証明は構成的なものであり, 証明の方針で d^* 色での彩色を求めると, $\mathrm{O}(nm)$ の計算時間で求められる．ただし, グラフの頂点数を n, 枝数を m とする．なお, 現在では Schrijver による計算時間 $O(md^*)$ のアルゴリズム [2] や, それを改良した, Cole 等による計算時間 $O(m \log d^*)$ のアルゴリズム [1] が知られている．

2　アルゴリズム

この節では Schrijver のアルゴリズムについて述べる．Schrijver のアルゴリズムは以下の命題に基づくものである．

命題 2 (Hall の定理)**.** *k-正則 2 部グラフには完全マッチングが存在する．ただし, k-正則とは, すべての頂点の次数が k であることをいう．*

Proof. k-正則 2 部グラフ G において, $d^* = k$ であるから, 定理 1 より, k 色による辺彩色が存在する．ある色が付いている枝の集合を M とすると, M はマッチングである．また, すべての頂点には各色の枝が 1 本ずつ接続しているので, M は完全マッチングである． □

2 部グラフの頂点集合を A, B とする．次数 $\frac{d^*}{2}$ 以下の頂点が A, B の片方に 2 点以上あれば 2 点を 1 つの頂点に縮約することで, A, B のそれぞれに次数 $\frac{d^*}{2}$ 以下の頂点が高々1 点であるようにする．次にダミーの頂点を加えることで, $|A| = |B|$ となるようにし, 枝を適当に加えて (多重枝も許す), d^*-正則なグラフを作る．このグラフにおける辺彩色を見つけることができれば, 元のグラフの辺彩色が得られる．

そこで, d^*-正則なグラフの辺彩色のアルゴリズムを述べる．単純な方法としては, 完全マッチングを 1 つずづ求め, それを順に取り除いていくという方法が考えられるが, 効率的ではない．効率的に求めるために, 以下のような分割統治法によるアルゴリズムが考えられる．

1. d^* が奇数のとき．完全マッチングを 1 つ求めて取り除くことにより, 次数 $d^* - 1$ の問題に帰着する．
2. d^* が偶数のとき．すべての頂点の次数は偶数なので, オイラー閉路を見つけて, 枝を 1 つおきに取ることでできる 2 つの部分グラフを考える．これらは $\frac{d^*}{2}$-正則なグラフなので, 次数 $\frac{d^*}{2}$ の問題 2 つに分割できる．

このアルゴリズムにおいては, k-正則 2 部グラフの完全マッチングを効率的に求めることが重要となる．

以下のアルゴリズムは Schrijver [2] によるものであり, k-正則 2 部グラフの完全マッチングを $\mathrm{O}(mk)$ で求めるものである．アルゴリズム 1 を用いることにより, d^*-正則なグラフの彩色が $\mathrm{O}(md^*)$ で求めることができる．

アルゴリズム 1

1. $w(e) = 1, \ \forall e \in E$ と初期化する．

2. $E^* = \{e \in E | w(e) > 0\}$ とし, E^* 中の閉路を探し, 存在しないならば E^* が完全マッチングであるので終了する. 存在するとき, 閉路を C とし, $C = M \cup N$ (M, N はマッチング, $w(M) \geq w(N)$) とする.

$$w(e) := \begin{cases} w(e) + 1 & (e \in M), \\ w(e) - 1 & (e \in N) \end{cases}$$

と更新して, 2 を繰り返す.

定理 3. アルゴリズム 1 は, k-正則グラフの完全マッチングを $\mathrm{O}(mk)$ で見出す.

Proof. まず, アルゴリズムが終了するときに, E^* が完全マッチングであることを示す. 初期状態においては各頂点に接続する枝の重み w の和はすべて k であり, これはアルゴリズムの中で変化しない. また, 重みは常に非負である. 終了するときには E^* を枝集合とする部分グラフは森をなすが, 各連結成分の葉 (1 つの枝にしか接続しない点) v に注目すると, v に接続する枝 $e = (uv)$ の重みは k であり, もう一方の e の端点 u からは E^* の枝は e 以外に出ていないとわかる (図 2). これは E^* がマッチングであることを表し, また, すべ

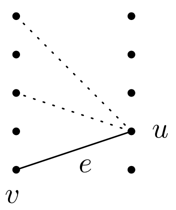

図 2: E^* がマッチングであることの証明.

ての頂点には E^* の枝が少なくとも 1 本は接続しているので, E^* は完全マッチングである.

次に反復について考える. $\sum_{e \in E} w(e)^2$ という量を考えると, 1 回の反復における増加量は,

$$\sum_{e \in M}((w(e)+1)^2 - w(e)^2) + \sum_{e \in N}((w(e)-1)^2 - w(e)^2) = 2w(M) + |M| - 2w(N) + |N| \geq |C|$$

である. この量は初期状態においては m であり, 終了するときには mk である. サイクル C を見つけ, 更新をするのにかかる時間は $\mathrm{O}(|C|)$ であるから, このアルゴリズムにかかる時間は $\mathrm{O}(mk)$ である. □

参考文献

[1] R. Cole, K. Ost, S. Schirra: Edge coloring bipartite multigraphs in $\mathrm{O}(E \log D)$ time, *Combinatorica*, 21 (2001), pp. 5–12.

[2] A. Schrijver: Bipartite edge coloring in $\mathrm{O}(\Delta m)$ time, *SIAM Journal on Computing*, 28 (1998), pp. 841–846.

[3] A. Schrijver: *Combinatorial Optimization*. Springer-Verlag, 2003.