Lecture 4 (マトロイド)

教員: 岩田 覚 助教授 文責: 高松 瑞代

1 マトロイド

マトロイドは, 線形独立性の組合せ論的抽象化を目的として, 1935 年に Whitney により導入された. マトロイド (matroid) の語源は「行列 (matrix) ＋もどき (oid)」である.

最初に, 体 $\boldsymbol{K}$ 上の行列 Q を考える. Q の行集合を R, 列集合を E とする. 行集合が $X(\subseteq R)$, 列集合が $Y(\subseteq E)$ である Q の小行列を $Q[X,Y]$ とかく. いま,

(1) $$\mathcal{I} = \{J \mid J \subseteq E, \operatorname{rank} Q[R,J] = |J|\} \subseteq 2^E$$

とすると, $\mathcal{I}$ は以下を満たす.

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I1) $I \subseteq J \in \mathcal{I} \Rightarrow I \in \mathcal{I}$.

(I2) $I, J \in \mathcal{I}, |I| < |J| \Rightarrow \exists j \in J \setminus I, I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$.

一般に, (I0)–(I2) を満たす $(E,\mathcal{I})$ をマトロイドと定義する. このとき, E を台集合, $\mathcal{I}$ を独立集合族, $I \in \mathcal{I}$ を独立集合という. (1) で定義した $(E,\mathcal{I})$ はマトロイドになっている.

マトロイド $(E,\mathcal{I})$ において, 極大独立集合 $B \subseteq E$ を基という.

命題 1. 基の要素数はすべて等しい.

証明. (I2) より明らか. □

(1) で定義したマトロイド $(E,\mathcal{I})$ の基の要素数は Q の階数なので, 命題 1 は, Q の階数が掃き出し方によらないことに対応している.

基の全体を基族といい, 基族 $\mathcal{B}$ は (B0)–(B1) を満たす.

(B0) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B1) $B, B' \in \mathcal{B}, b \in B \setminus B' \Rightarrow \exists e \in B' \setminus B, (B \setminus \{b\}) \cup \{e\} \in \mathcal{B}$.

(B1) は, (I2) において $J = B', I = B \setminus \{b\}$ とおくと導ける.

階数関数 $\rho : 2^E \to \mathbf{Z}$ を次のように定義する:

(2) $$\rho(X) = \max\{|J| \mid J \subseteq X, J \in \mathcal{I}\} \qquad (X \subseteq E).$$

このとき, ρ は (R0)–(R3) を満たす.

(R0) $\rho(\emptyset) = 0$.

(R1) $\forall X \subseteq E, \rho(X) \leq |X|$.

(R2) $X \subseteq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.

(R3) $\forall X, Y \subseteq E, \quad \rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \qquad$ (ρ は劣モジュラ関数).

(R3) の証明. H を $X \cap Y$ の基 (極大独立部分集合) とする. このとき, $|H| = \rho(X \cap Y)$ である. H を含む X の基を I とすると, $|I| = \rho(X)$ が成り立つ. I を含む $X \cup Y$ の基を J とすると, $|J| = \rho(X \cup Y)$ が成り立つ. $J \cap Y \in \mathcal{I}$ に対し, $|J \cap Y| \leq \rho(Y)$ が成り立つ. 以上と $|J \cap Y| = |J \setminus X| + |H| = |J| - |I| + |H|$ を合わせて, $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$ が成立する. □

(1) で定義したマトロイド $(E, \mathcal{I})$ の階数関数は $\rho(X) = \operatorname{rank} Q[R, X]$ である.

基族の公理 (B0)–(B1), 階数関数の公理 (R0)–(R3) は独立集合族の公理 (I0)–(I2) と等価であり, これらの公理を用いてマトロイドを定義することもできる. このとき, それぞれ

$$\mathcal{I} = \{J \mid J \subseteq B \in \mathcal{B}\}, \tag{3}$$

$$\mathcal{I} = \{J \mid \rho(J) = |J|\} \tag{4}$$

とおけば, $\mathcal{I}$ は (I0)–(I2) を満たす.

マトロイド $(E, \mathcal{I})$ において, 極小従属集合 $C \subseteq E$ をサーキットという. ただし, 従属集合とは独立でない集合である. 基とは異なり, サーキットの要素数は全て等しいとは限らない (cf. 命題 1). サーキットの全体をサーキット族といい, サーキット族 $\mathcal{C}$ は (C0)–(C2) を満たす.

(C0) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

(C1) $C, C' \in \mathcal{C}, C \subseteq C' \Rightarrow C = C'$.

(C2) $C, C' \in \mathcal{C}, C \neq C', e \in C \cap C' \Rightarrow \exists C^\circ \in \mathcal{C}, C^\circ \subseteq C \cup C' \setminus \{e\}$.

(C2) の証明. 任意の $e \in C$ に対して $C \setminus \{e\} \in \mathcal{I}$ なので, $\rho(C) = |C| - 1$. 同様にして $\rho(C') = |C'| - 1$. また, $C \cap C' \subset C$ より $C \cap C' \in \mathcal{I}$ なので, $\rho(C \cap C') = |C \cap C'|$. (R3) より

$$\rho(C) + \rho(C') \geq \rho(C \cup C') + \rho(C \cap C')$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}\rho(C \cup C') &\leq |C| + |C'| - 2 - |C \cap C'| \\ &= |C \cup C'| - 2 \qquad (\because |C| + |C'| = |C \cup C'| + |C \cap C'|).\end{aligned}$$

よって,

$$\rho(C \cup C' \setminus \{e\}) \leq \rho(C \cup C') \leq |C \cup C'| - 2 = |C \cup C' \setminus \{e\}| - 1$$

より, $C \cup C' \setminus \{e\}$ は従属集合なので, $C^\circ \subseteq C \cup C' \setminus \{e\}$ となる $C^\circ \in \mathcal{C}$ が存在する. □

サーキット族の公理 (C0)–(C2) を使ってもマトロイドは定義できる.

以下で定義される関数 $\mathrm{cl}: 2^E \to 2^E$ を閉包関数という:

$$\mathrm{cl}(X) = \{j \mid \rho(X \cup \{j\}) = \rho(X)\}. \tag{5}$$

閉包関数の性質として

$$B \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathrm{cl}(B) = E,$$
$$\mathrm{cl}(X) \supseteq X$$

がすぐにわかる.

命題 2. 任意の $I \in \mathcal{I}$ と任意の $j \in \mathrm{cl}(I) \setminus I$ に対し, $I \cup \{j\}$ は唯一つのサーキットを含む.

証明. $\rho(I \cup \{j\}) = \rho(I)$ より $I \cup \{j\}$ は従属集合なのでサーキットを含む. C, C' を $I \cup \{j\}$ に含まれるサーキットとすると, $j \in C \cap C'$. もし $C \neq C'$ ならば, (C2) より $C^\circ \subseteq C \cup C' \setminus \{j\} \subseteq I \in \mathcal{I}$ となる $C^\circ \in \mathcal{C}$ が存在し, (I1) に矛盾. よって $I \cup \{j\}$ に含まれるサーキットは唯一つである. □

命題 2 のサーキットを基本サーキットといい, $C(I|j)$ で表す.

2 マトロイドの例

- **2 値マトロイド**

  有限体 GF(2) 上で行列表現可能なマトロイド.

- **グラフ的マトロイド** $(E, \mathcal{I})$

  無向グラフ (V, E) に対し, $F \subseteq E$ が閉路を含まないならば, F を森という. このとき, 独立集合族を

  $$\mathcal{I} = \{F \mid F \subseteq E : \text{森}\}$$

  で定義すると,

  基…全域森 (各連結成分で全域木),

  サーキット…初等的閉路 (同じ点を 2 回以上使わない閉路),

  階数…(端点数)−(連結成分数).

  グラフ的マトロイドを接続行列で表現すると, 2 値マトロイドになっている.

- **横断マトロイド** $(U, \mathcal{I})$

  2 部グラフ $G = (U, V; A)$ に対して, $\mathcal{I} = \{U \cap \partial M \mid M \subseteq A : \text{マッチング}\}$ と定義する.

- **一様マトロイド** $U_{n,k} = (U, \mathcal{I})$

  $|U| = n, k \leq n$ なる k に対し, $\mathcal{I} = \{J \mid J \subseteq U, |J| \leq k\}$ と定義する. これは, 完全 2 部グラフ $K_{n,k}$ に対する横断マトロイドになっている. $U_{4,2}$ は GF(2) 上で行列表現不可能であることが知られている.