2005 年度 冬学期 離散情報論	2005 年 11 月 28 日

Lecture 6 (同時交換性)

教員: 岩田 覚 助教授　　　　文責: 大川 徳之

同時交換性

命題 1. 任意のサーキット C とコサーキット C^* に対し，$|C \cap C^*| \neq 1$.

証明. $|C \cap C^*| = 1$ を仮定すると，$\{e\} = C \cap C^*$ に対して，$C - \{e\}$ は $\mathcal{M}$ の独立集合，$C^* - \{e\}$ は $\mathcal{M}^*$ の独立集合となる.

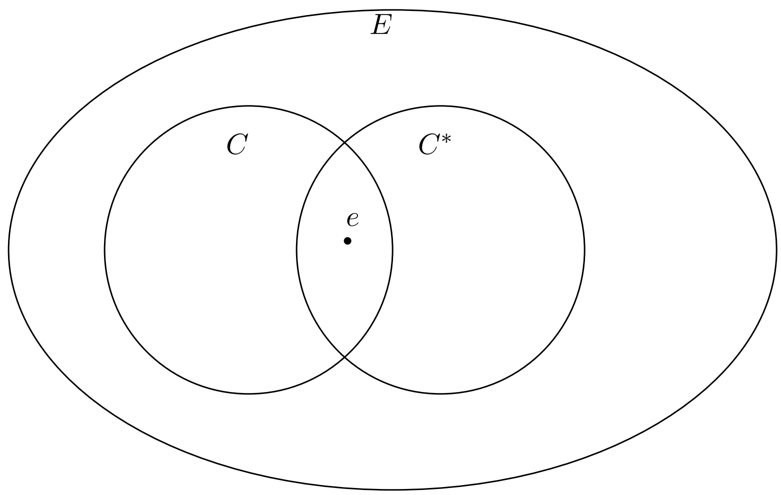

図 1: イメージ

つまり，$E - C^*\backslash\{e\}$ は $\mathcal{M}$ の基を含む．したがって，$C\backslash\{e\} \subseteq E - C^*\backslash\{e\}$ より，このとき，$C\backslash\{e\} \subseteq B \subseteq E - C^*\backslash\{e\}$ となる基底 $B \in \mathcal{B}$ が存在し，$e \notin B$ より，$C^* \subseteq E\backslash B$ を得る．しかし，C^* は $\mathcal{M}^*$ において従属であるから，ここで，$\mathcal{M}^*$ の基 $E\backslash B$ に含まれるのは矛盾. □

命題 2. 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と任意の $b \in B_1\backslash B_2$ に対して，$(B_1\backslash\{b\}) \cup \{e\} \in \mathcal{B}, (B_2 \cup \{b\})\backslash\{e\} \in \mathcal{B}$ となる $e \in B_2\backslash B_1$ が存在する.

証明. 基本コサーキット $C^*(B_1|b) = \{e|(B_1\backslash\{b\}) \cup \{e\} \in \mathcal{B}\}$ と，基本サーキット $C(B_2|b) = \{e|(B_2 \cup \{b\})\backslash\{e\} \in \mathcal{B}\}$ に対して，$b \in C^*(B_1|b) \cap C(B_2|b)$ なので，命題 1 より，$|C^*(B_1|b) \cap C(B_2|b)| > 1$．すなわち，$e \in (C^*(B_1|b) \cap C(B_2|b))\backslash\{b\} \subseteq B_2\backslash B_1$ が存在する. □

マイナー

定義 3. マトロイド $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ のとき，$F \subseteq E$ に対して，$\mathcal{I}^F = \{I|I \in \mathcal{I}, I \subseteq F\}$ を独立集合族とするマトロイド $(F, \mathcal{I}^F)$ を M の F への簡約 $M \cdot F$ という.

定義 4. 部分集合 $Z \subseteq E$ に対して，$\rho_Z(X) = \rho(X \cup Z) - \rho(Z)$ $(X \subseteq E\backslash Z)$ を階数関数とするマトロイド $(E\backslash Z, \rho_Z)$ を $\mathcal{M}$ の Z による縮約 $\mathcal{M}/Z$ という.

簡約と縮約の間には $\mathcal{M}/Z = (\mathcal{M}^* \cdot (E\backslash Z))^*$ の関係がある.

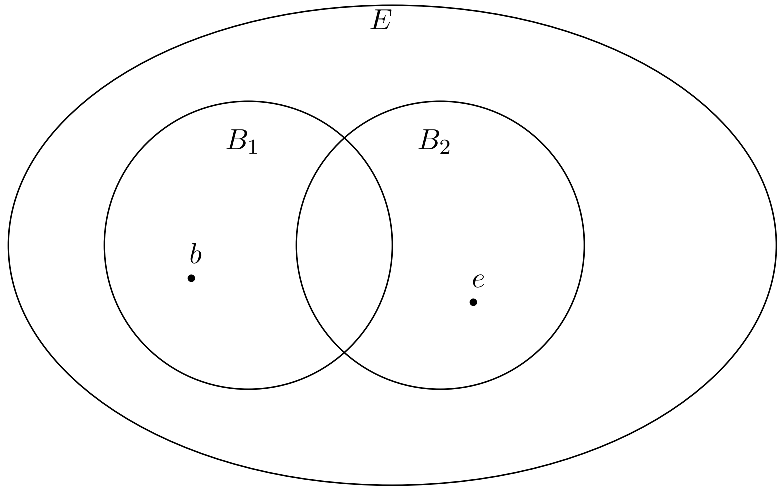

図 2: 同時交換性

定義 5. 簡約と縮約をくりかえして得られるマトロイドをマイナーという.

グラフで表現できる性質はマイナーをとることに関して閉じている.

定理 6 (Tutte). *$\mathcal{M}$ が 2 値マトロイド ⇔ $\mathcal{M}$ は $U_{4,2}$ をマイナーとして含まない.*

証明. この授業では証明は省略. □

グラフで表現できる性質はマイナーをとることに関して閉じているため，ある $\mathcal{L}$ が 2 値マトロイド $\mathcal{M}$ のマイナーならば，$\mathcal{L}$ も 2 値マトロイドとなる．ここで，一様マトロイド $U_{4,2}$ は 2 値マトロイドではないので，$\mathcal{M}$ は $U_{4,2}$ をマイナーとして含まない.

交換可能性グラフ

もう少し交換可能性にこだわってみよう.

定義 7. (交換可能性グラフ) マトロイド $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$，$I \in \mathcal{I}$，$J \subseteq \mathrm{cl}(I)$，$H = \{(i,j) | j \in J \backslash I, i \in C(I|j)\}$ に対して，グラフ $G(I,J) = (I \backslash J, J \backslash I; H)$ を交換可能性グラフと言う.

命題 8. *$B, D \in \mathcal{B} \Rightarrow G(B,D)$:完全マッチングを有する交換可能性グラフ.*

証明. 完全マッチングを持たない $B, D \in \mathcal{B}$ うちで，$|B \backslash D| = |D \backslash B|$ が最小のものを考える．同時交換性より，任意の $j \in D \backslash B$ に対して，$i \in B \backslash D$ が存在して，$(i,j) \in H, D' = (D - \{i\}) \cup \{i\} \in \mathcal{B}$. 明らかに，$|B \backslash D'| = |B \backslash D| - 1$ で，$G(B, D')$ は完全マッチング M を有する．ならば，$M \cup \{(i,j)\}$ は $G(B,D)$ の完全マッチングになる. □

命題 9. *$B \in \mathcal{B}, |B| = |D|$ に関する交換可能性グラフ $G(B,D)$ が唯一の完全マッチングを持つならば，$D \in \mathcal{B}$.*

証明. $D \notin \mathcal{B}$ と仮定する．このとき $C \subseteq D$ となる $C \in \mathcal{C}$ が存在する．任意の $i \in B \backslash D$ に対して，$|C \cap C^*(B|i)| \neq 1 \Rightarrow |(C \backslash B) \cap C^*(B|i)| \neq 1$. また，$i$ が完全マッチング M によって $C \backslash B$ のノードと結ばれるならば，$|(C \backslash B) \cap C^*(B|i)| > 1$. つまり，こういうノードのそれぞれについて，必ず 2 本以上の枝が $C \backslash B$ に入っている．すなわち，$G(B,D)$ に交互閉路が存在するので，別のマッチングが存在し，完全マッチングが唯一であることに反する. □

主張 10. $I \in \mathcal{I}, |I| = |J|, J \subseteq \mathrm{cl}(I)$ で，$G(I, J)$ が唯一の完全マッチングを持つならば，$j \in \mathcal{I}, \mathrm{cl}(I) = \mathrm{cl}(J)$

証明. $\mathcal{M} \cdot \mathrm{cl}(I)$ に上記性質を適用すると，$J \in \mathcal{I}$ が言える．

$\mathrm{cl}(J) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(I)) = \mathrm{cl}(I)$ で，J が $\mathcal{M} \cdot \mathrm{cl}(I)$ の基であることから，$\mathrm{cl}(J) = \mathrm{cl}(I)$ となる． □