| 2005 年度冬学期・離散情報論 | 2005 年 12 月 5 日 |
|---|---|

# Lecture 7 (マトロイドの共通独立集合族)

**教員**: **岩田 覚 助教授**　　**記**: **黒木 裕介**

ある組合せ構造がマトロイドであることがわかると，重み最大の独立集合を求められることを先週まで見てきた．今回は，二つのマトロイドの共通独立集合族について述べる．マトロイドにたくさんのバリエーションがあることから，マトロイド二つを組み合わせるとさらに多くのバリエーションが生まれる．これにより，かなり多くの問題を表すことが可能である．

## 7.1 共通独立集合

台集合 $E$ 上の二つのマトロイド $\boldsymbol{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $\boldsymbol{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ において，共通独立集合 $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ で要素数 $|I|$ が最大のものを最大独立集合という．以後，添字によって，階数関数や閉包，基本閉路が $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ のどちらのマトロイドに関するものかを指し示す．

**例** 7.1 (**2 部グラフの最大マッチング**). 2 部グラフの最大マッチングとは，マッチングの中で，要素数がもっとも大きくなるものであった．マッチングとは，各頂点の次数が 1 以下の枝集合である．この定義は，2 部グラフにおいては，以下のように捉えられる:

> 左側の点ごとに，接続する枝の中から高々 1 本を選んで集める (**図** 1). 集めた枝がどの右側の点に接続するかでグループ分けをしたとき，すべてのグループが高々 1 本の枝からなっていれば，集めた枝集合はマッチングである．

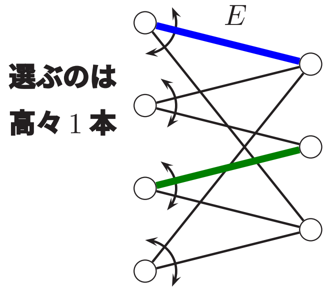


**図** 1. 2 部グラフのマッチング．

この捉え方をマトロイドの言葉で言い換えると，「2 部グラフのマッチングは，二つの分割マトロイドで共通に独立な集合である」となる．ここで，分割マトロイド $(E, \mathcal{I})$ とは，$E$ の分割 $E_1, \ldots, E_k$ を台集合とする $k$ 個のマトロイド $(E_j, \mathcal{I}_j)\,(j = 1, \ldots, k)$ に対し，$E$ 上の独立集合 $\mathcal{I}$

の定義を

$$I \in \mathcal{I} \overset{\text{def.}}{\iff} |I \cap E_j| \in \mathcal{I}_j \quad (j = 1, \ldots, k)$$

で与えるマトロイドである．2 部グラフのマッチングで用いる分割マトロイドは，$k$ 個のマトロイド $(E_j, \mathcal{I}_j)\,(j = 1, \ldots, k)$ として，独立集合族を

$$I \in \mathcal{I}_j \overset{\text{def.}}{\iff} |I \cap E_j| \leqslant 1$$

で定義する一様マトロイドを採用したものである． **(例終)**

2 部グラフの最大マッチングには，効率的なアルゴリズムや，最大最小定理が存在するので，一般の最大共通独立集合にも似たような性質がないか確かめたい．

**命題** 7.2. $\rho_1, \rho_2$ をそれぞれ $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ の階数関数とする．このとき以下が成り立つ:

$$I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \Rightarrow \forall X \subseteq E : |I| \leqslant \rho_1(X) + \rho_2(E - X).$$

**証明**. $\boldsymbol{M}_i$ $(i = 1, 2)$ の階数関数の定義が $\rho_i(X) := \max\{|J| \mid J \subseteq X, J \in \mathcal{I}_i\}$, $(X \subseteq E)$ であることから，

$$|I| = |I \cap X| + |I - X| \leqslant \rho_1(X) + \rho_2(E - X).$$

□

$X$ はいろいろ取れるので，その中で最小値を取る (タイトな) ものに興味がある．最大流問題における最大流・最小カットの定理を思い起こすと，左辺の最大値と右辺の最小値が一致することが期待される．実際に，以下の定理が成り立つ．

**定理** 7.3 (**最大最小定理**).

$$\max\{|I| \mid I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{\rho_1(X) + \rho_2(E - X) \mid X \subseteq E\}. \tag{1}$$

講義では，証明を二つ紹介する．まず一つ目の証明を行い，次に，最大共通独立集合を求めるアルゴリズムを紹介する．最後にそのアルゴリズムは (構成的な) 証明になっていることを示す．

**証明**. 式 (1) の右辺を $k$ とおく．つまり，

$$k := \min\{\rho_1(X) + \rho_2(E - X) \mid X \subseteq E\}. \tag{2}$$

以下では，台集合の大きさ $|E|$ に関する帰納法を行う．

(I) $|E| = 0$ のとき，自明．

(II) 台集合 $E$ $(|E| \geqslant 1)$ について考える．台集合の大きさが $|E| - 1$ のとき成り立つと仮定する．

$\rho_1(\{e\}) = \rho_2(\{e\}) = 1$ となる $e \in E$ を選ぶ．(このような $e \in E$ は，選べるか，さもなくば自明に式 (1) が成立する ☞ 補足 7.1).

任意の $Y, Z \subseteq E - \{e\}$ に対して，以下の式 (3)–(6) が成り立つ．

- $\rho_1, \rho_2$ の劣モジュラ性から,

$$\rho_1(Y) + \rho_1(Z \cup \{e\}) \geqslant \rho_1(Y \cap Z) + \rho_1(Y \cup Z \cup \{e\}), \tag{3}$$
$$\rho_2(E - Z) + \rho_2(E - (Y \cup \{e\})) \geqslant \rho_2(E - (Z \cup Y \cup \{e\})) + \rho_2(E - (Y \cap Z)). \tag{4}$$

- $k$ の定義 (2) から,

$$\rho_1(Y \cap Z) + \rho_2(E - (Y \cap Z)) \geqslant k, \tag{5}$$
$$\rho_1(Y \cup Z \cup \{e\}) + \rho_2(E - (Z \cup Y \cup \{e\})) \geqslant k. \tag{6}$$

よって，(3)+(4), (5)+(6) より,

$$\forall Y, Z \subseteq E - \{e\} : \rho_1(Y) + \rho_1(Z \cup \{e\}) + \rho_2(E - Z) + \rho_2(E - (Y \cup \{e\})) \geqslant 2k. \tag{7}$$

ここで，$|I| = k$ の $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が存在しないと仮定する．帰納法の仮定を

- $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ の $E - \{e\}$ への簡約 $\boldsymbol{M}_1 \setminus e, \boldsymbol{M}_2 \setminus e$,
- $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ の $\{e\}$ による縮約 $\boldsymbol{M}_1 / e, \boldsymbol{M}_2 / e$

に適用すると以下が成り立つ (証明 ☞ 補足 7.2, 7.3):

$$\exists Y \subseteq E - \{e\} : \rho_1(Y) + \rho_2(E - (Y \cup \{e\})) \leqslant k - 1; \tag{8}$$
$$\exists Z \subseteq E - \{e\} : \rho_1(Z \cup \{e\}) + \rho_2(E - Z) \leqslant k. \tag{9}$$

式 (8), (9) を加えることにより，次式を得る:

$$\exists Y, Z \subseteq E - \{e\} : \rho_1(Y) + \rho_1(Z \cup \{e\}) + \rho_2(E - Z) + \rho_2(E - (Y \cup \{e\})) \leqslant 2k - 1. \tag{10}$$

したがって，式 (7), (10) は矛盾．これにより，「$|I| = k$ の $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が存在しない」という仮定が誤りであることが分かった.

(I), (II) よりすべての台集合の大きさに関して式 (1) が成り立つことが証明できた. □

## 7.2 最大共通独立集合の計算法

以下では，与えられた $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ より大きな共通独立集合があるかを判定し，あれば拡大するというステップについて説明する．そのステップが確立できれば，最大共通独立集合 $I$ を求めるアルゴリズムは,

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 初期解 $I \leftarrow \emptyset$ ($\emptyset$ が共通独立集合であることは自明); | |
| 2 | $I$ より大きな共通独立集合があるか判定する; | 拡大ステップ |
| 2-1 | あれば，$I$ を拡大して 2 へ; | |
| 2-2 | なければ，$I$ を出力して終了する. | |

と記述できる.

補助グラフ $G_I = (E, A_1 \cup A_2)$ をつくる．ただし，

$$A_1 = \{(i,j) \mid j \in \mathrm{cl}_1(I) - I,\ i \in C_1(I \mid j) - \{j\}\},$$
$$A_2 = \{(j,i) \mid j \in \mathrm{cl}_2(I) - I,\ i \in C_2(I \mid j) - \{j\}\}$$

とする．さらに，集合 $S, T$ を次のように定義する:

$$S := E - \mathrm{cl}_1(I),\ T := E - \mathrm{cl}_2(I).$$

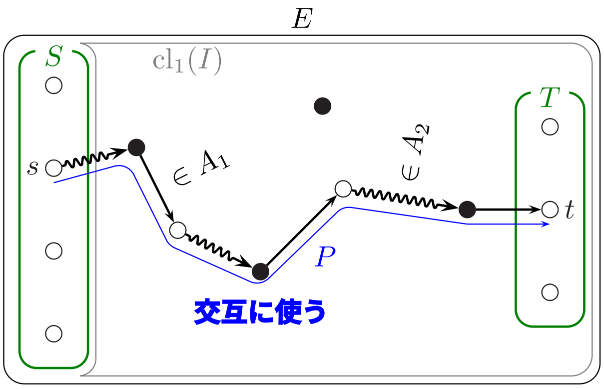


**図** 2. 補助グラフ $G_I = (E, A_1 \cup A_2)$, $S$ から $T$ への枝数最小有向道 $P$. (図中凡例: ● $\in I$, ○ $\notin I$)

ここで，$S$ から $T$ への有向道がある場合とない場合に分ける．前者では要素数が 1 だけ大きな共通独立集合をつくることができる．後者では「手元にある」$I$ が最大共通独立集合であることが証明できる．

(I) $S$ から $T$ への有向道がある場合．

枝数最小の有向道 (枝集合) $P$ を採用する (**図** 2)．枝数最小の有向道は，幅優先探索をすれば見つかる．$P$ の始点を $s \in S$, $P$ の終点を $t \in T$, $F$ を $P$ が通る点の集合とする．

$I$ と $F$ の対称差 $I \triangle F$ を $J$ と定める．すると (植木算より), $|J| = |I| + 1$. 以下では，こうして定めた $J$ が共通独立集合であることを示す． (対称差 ☞ 補足 7.4)

$J_1 := J - \{s\}, J_2 := J - \{t\}$ と定めると，

- $P \cap A_1$ は $\boldsymbol{M}_1$ に対する交換可能性グラフ $G_1(I, J_1)$ の唯一の完全マッチングであり， (交換可能性グラフ ☞ 補足 7.5)
- $P \cap A_2$ は $\boldsymbol{M}_2$ に対する交換可能性グラフ $G_2(I, J_2)$ の唯一の完全マッチングである (証明 ☞ 補足 7.6).

すると，前回最後の系より， (前回最後の系 ☞ 補足 7.7)

- $J_1 \in \mathcal{I}_1, \mathrm{cl}_1(J_1) = \mathrm{cl}_1(I)$,
- $J_2 \in \mathcal{I}_2, \mathrm{cl}_2(J_2) = \mathrm{cl}_2(I)$.

よって，

- $s \in E - \mathrm{cl}_1(I) = E - \mathrm{cl}_1(J_1)$ より，$J = J_1 \cup \{s\} \in \mathcal{I}_1$,

- $t \in E - \mathrm{cl}_2(I) = E - \mathrm{cl}_2(J_2)$ より，$J = J_2 \cup \{t\} \in \mathcal{I}_2$.

したがって，$J \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ となり，$I$ よりサイズが 1 だけ大きな共通独立集合として，$J$ が得られた．

(II) $S$ から $T$ への有向道がない場合．

　$X$ を $S$ から到達不可能な $E$ の点全体の集合とする (**図** 3)．このとき，以下の二つの命題が成立する．

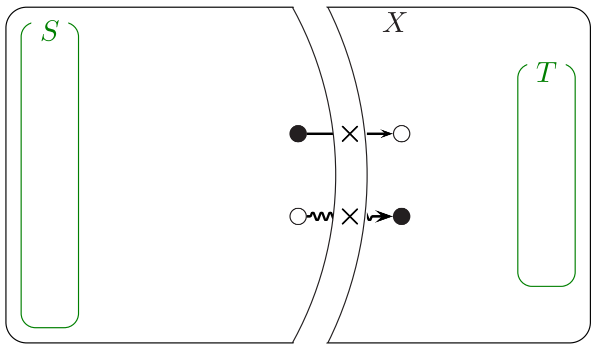


**図** 3. $S$ から到達不可能な $E$ の点全体の集合を $X$ とする．

**命題** 7.4. $|I \cap X| = \rho_1(X)$.

**証明**. ($\leqslant$) $I \in \mathcal{I}_1$ ゆえ，$|I \cap X| \leqslant \rho_1(X)$ は明らか．

($\not<$) もし $|I \cap X| < \rho_1(X)$ ならば，$J \subseteq X$, $|J| > |I \cap X|$ となる $J \in \mathcal{I}_1$ が存在する．独立集合公理 (**I2**) より，$(I \cap X) \cup \{j\} \in \mathcal{I}_1$ となる $j \in J - I\,(\subseteq X - I \subseteq \mathrm{cl}_1(I) - I)$ が存在する．ここで，$X$ の定め方より，$A_1$ の枝がカット $(E - X, X)$ を $E - X$ から $X$ の向きに横切ることはないので，

$$\forall j \in X - I : C_1(I \mid j) \subseteq X.$$

すると，

$$\begin{array}{ccc} C_1(I \mid j) & \subseteq & (I \cap X) \cup \{j\} \\ \rotatebox{90}{$\notin$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathcal{I}_1 & & \mathcal{I}_1 \end{array}$$

が成り立つことになり，公理 (**I1**) に矛盾する． □

**命題** 7.5. $|I - X| = \rho_2(E - X)$.

**証明**. 命題 7.4 と同様にして証明できる． □

　したがって，$S$ から $T$ への有向道がなければ，

$$|I| = |I \cap X| + |I - X| = \rho_1(X) + \rho_2(E - X).$$

これより，「手元にある」$I$ が最大を達成していることが言えた．

# 付録

**補足** 7.1. 台集合 $E$, マトロイド $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ に対し，$\rho_1(\{e\}) = \rho_2(\{e\}) = 1$ となる $e \in E$ を選ぶ．このような $e \in E$ は，選べるか，さもなくば自明に式 (1) が成立する．

**証明**. もしそのような $e \in E$ が存在しないと仮定する．singleton (単一要素からなる集合) の階数は 0 または 1 であることに注意すると，この仮定の下では，任意の $e \in E$ に対して，$\rho_1(\{e\}) = 0$ または $\rho_2(\{e\}) = 0$ が成り立つ．$X := \{j \mid \rho_1(\{j\}) = 0\}$ とすると，階数関数公理 (**R3**, 劣モジュラ性) より，$\rho_1(X) = 0$. $j \in (E - X)$ に対しては，$\rho_1(\{j\}) = 1$ より $\rho_2(\{j\}) = 0$. よって $\rho_2(E - X) = 0$. すると，

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \max\{|I| \mid I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} \\ &\leqslant \min\{\rho_1(X) + \rho_2(E - X) \mid X \subseteq E\} \leqslant \rho_1(X) + \rho_2(E - X) = 0 \end{aligned}$$

より，式 (1) は成り立つ． $\square$

**補足** 7.2. 台集合の大きさが $|E| - 1$ のとき式 (1) は成り立つと仮定し ($\sharp$)，台集合 $E$ について考える．$e \in E$ は $\rho_1(\{e\}) = \rho_2(\{e\}) = 1$ を満たすものとする．$|I| = k$ の $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が存在しないと仮定する ($*$)．このとき，仮定 ($\sharp$) を $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ の $E - \{e\}$ への簡約 $\boldsymbol{M}_1 \setminus e$, $\boldsymbol{M}_2 \setminus e$ に適用すると以下が成り立つ (色付けは **図** 4 と対応):

$$\exists Y \subseteq E - \{e\} : \rho_1(Y) + \rho_2\left(E - (Y \cup \{e\})\right) \leqslant k - 1. \tag{8}$$

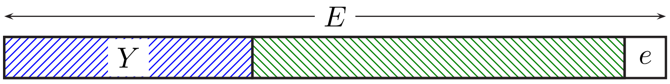


**図** 4. 簡約 $\boldsymbol{M}_i \setminus e$ と $Y$.

**証明**. マトロイド $\boldsymbol{M} \setminus e$ の台集合は $E - \{e\}$, 独立集合族は $\mathcal{I}_i^{E-\{e\}} := \{I \mid I \in \mathcal{I}_i,\ I \subseteq E - \{e\}\}$, 階数関数は

$$\rho_i^{E-\{e\}}(X) := \max\{|J| \mid J \subseteq X,\ J \in \mathcal{I}_i^{E-\{e\}}\} = \rho_i(X),\ (X \subseteq E - \{e\})$$

である．読み砕くと，「$\boldsymbol{M}_i$ で独立な集合は $\boldsymbol{M}_i \setminus e$ でも独立であるし，$\{e\}$ を取り去ることで $\boldsymbol{M}_i$ で独立になる集合も $\boldsymbol{M}_i \setminus e$ では独立である」となる．

$\boldsymbol{M}_1 \setminus e$, $\boldsymbol{M}_2 \setminus e$ の共通独立集合 $I$ を考える．仮定 ($*$) から $|I| \leqslant k - 1$ を満たす必要がある．さらに仮定 ($\sharp$) より，

$$k - 1 \geqslant \max|I| = \min\{\underbrace{\rho_1(Y)}_{\boldsymbol{M}_1 \setminus e \text{ での } Y \text{ の階数}} + \underbrace{\rho_2(E - (Y \cup \{e\}))}_{\boldsymbol{M}_2 \setminus e \text{ での } (E - (Y \cup \{e\})) \text{ の階数}} \mid Y \subseteq E - \{e\}\}.$$

これより，$\exists Y \subseteq E - \{e\} : \rho_1(Y) + \rho_2(E - (Y \cup \{e\})) \leqslant k - 1$. $\square$

**補足** 7.3. 台集合の大きさが $|E|-1$ のとき式 (1) は成り立つと仮定し ($\sharp$)，台集合 $E$ について考える．$e \in E$ は $\rho_1(\{e\}) = \rho_2(\{e\}) = 1$ を満たすものとする．$|I| = k$ の $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が存在しないと仮定する ($*$)．このとき，仮定 ($\sharp$) を $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ の $\{e\}$ による縮約 $\boldsymbol{M}_1 / e$, $\boldsymbol{M}_2 / e$ に適用すると以下が成り立つ (色付けは **図** 5 と対応):

$$\exists Z \subseteq E - \{e\} : \rho_1(Z \cup \{e\}) + \rho_2(E - Z) \leqslant k. \tag{9}$$

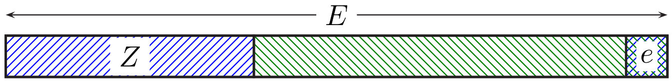


**図** 5. 縮約 $\boldsymbol{M}_i / e$ と $Z$.

**証明**. マトロイド $\boldsymbol{M}_i / e$ の台集合は $E - \{e\}$, 階数関数は

$$\rho_{i,\{e\}}(X) := \rho_i(X \cup \{e\}) - \rho_i(\{e\}), (X \subseteq E - \{e\}),$$

独立集合族は $\mathcal{I}_{i,\{e\}} = \{J \mid \rho_{i,\{e\}}(J) = |J|,\ J \subseteq E - \{e\}\}$ である．読み砕くと，「$\boldsymbol{M}_i / e$ で独立な集合は，$\{e\}$ を付け加えても $\boldsymbol{M}_i$ で独立である」となる．

$\boldsymbol{M}_1 / e$, $\boldsymbol{M}_2 / e$ の共通独立集合 $I$ を考える．仮定 ($*$) より，$|I| \leqslant k - 2$ を満たす必要がある．さらに仮定 ($\sharp$) より，

$$k - 2 \geqslant \max |I| = \min\{\underbrace{\rho_1(Z \cup \{e\}) - \rho_1(\{e\})}_{\boldsymbol{M}_1/e \text{ での } Z \text{ の階数}} + \underbrace{\rho_2(E - Z) - \rho_2(\{e\})}_{\boldsymbol{M}_2/e \text{ での } E-(Z\cup\{e\}) \text{ の階数}} \mid Z \subseteq E - \{e\}\}.$$

$\rho_1(\{e\}) = \rho_2(\{e\}) = 1$ より，$\exists Z \subseteq E - \{e\} : \rho_1(Z \cup \{e\}) + \rho_2(E - Z) \leqslant k$. $\square$

**補足** 7.4 (**対称差の定義**). 対称差とは，絵で示すと**図** 6 の斜線部である．別の表現で言い換えれば $I \triangle F := (I \cup F) - (I \cap F)$ である．

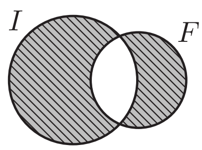


**図** 6. 対称差 $I \triangle F$ の定義 (図中 ▨: $I \triangle F$).

**補足** 7.5 (**交換可能性グラフの定義**). $\boldsymbol{M} = (E, \mathcal{I})$ に対する交換可能性グラフ $G(I, J)$ とは，$G(I, J) := (I - J, J - I; H)$, $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq \mathrm{cl}(I)$, $H = \{(i, j) \mid j \in J - I,\ i \in C(I \mid j) - \{j\}\}$.

**補足** 7.6. 唯一の完全マッチングであることの必要十分条件は，唯一の完全マッチングが並行枝になり，かつ，マッチング以外の枝が左下から右上にだけ張られるように点集合を並べ替えて描けることである (**図** 7)．そのように並べ替えられると，完全マッチングは下の並行枝から強制的に選ばされるので，一意であることが示せる (十分性)．ここでは必要性も認めて話を進める．

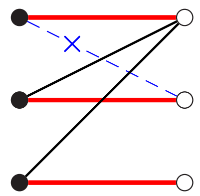

**図** 7. 唯一の完全マッチングになることを確認するための並べ替え.

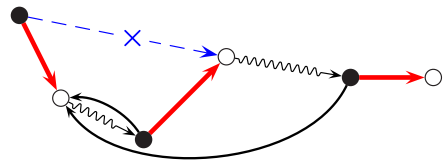

**図** 8. 枝数最小の有向道には「ショートカット」はない.

いま，$P$ は $S$ から $T$ への有向道の中から枝数最小のものを選んできたので，「ショートカット」はない (**図** 8). よって，唯一の完全マッチングであることが保証される.

**補足** 7.7 (**前回最後の系**).

$$\begin{bmatrix} I \in \mathcal{I},\ |J| = |I|,\ J \subseteq \mathrm{cl}(I), \\ G(I,J)\text{: 唯一の完全マッチングを有する.} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} J \in \mathcal{I}, \\ \mathrm{cl}(J) = \mathrm{cl}(I). \end{bmatrix}$$