2005 年度 冬学期 離散情報論	2006 年 1 月 16 日

Lecture 10 (劣モジュラ関数)

教員: 岩田 覚 助教授　　　　文責: 岩佐 大

劣モジュラ関数は，多くの組合せ最適化問題に関連してよく現れる関数である．例えば，ネットワークのカット容量関数やマトロイドの階数関数は，劣モジュラ関数となる．劣モジュラ関数の性質を知ることにより，それに関連する問題に対して一般論と個々の事情を踏まえた理解ができることから，劣モジュラ関数は興味深い関数である．

1　劣モジュラ関数と基多面体

V を有限集合とし，$n = |V|$ とする．集合関数 $f : 2^V \to \mathbb{R}$ が，任意の $X, Y \subseteq V$ に対して

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$$

を満たすとき，f は劣モジュラ関数とよばれる．一般性を失うことなく，$f(\emptyset) = 0$ と仮定できる．

劣モジュラ関数を考えるときの枠組みとして，空間 $\mathbb{R}^V = \{x \mid x : V \to \mathbb{R}\}$ を考える．ベクトル $x \in \mathbb{R}^V$ と各 $v \in V$ に対して，x の v に関する成分を $x(v)$ で表すものとする．また，部分集合 $Y \subseteq V$ に対して，$x(Y) = \sum_{v \in Y} x(v)$ と定義する．このとき，x は $x(\emptyset) = 0$ を満たし，

$$x(X) + x(Y) = x(X \cap Y) + x(X \cup Y) \tag{1}$$

がつねに成り立つような関数と同一視することができる．

集合関数 $f : 2^V \to \mathbb{R}$ を劣モジュラ関数で $f(\emptyset) = 0$ を満たすものとする．f に関連して，劣モジュラ多面体 $\mathrm{P}(f)$ と基多面体 $\mathrm{B}(f)$ が

$$\mathrm{P}(f) = \{x \mid x \in \mathbb{R}^V,\ \forall\, Y \subseteq V,\ x(Y) \leq f(Y)\},$$
$$\mathrm{B}(f) = \{x \mid x \in \mathrm{P}(f),\ x(V) = f(V)\}$$

によって定義される．$|V| = 2$ の場合における劣モジュラ多面体 $\mathrm{P}(f)$ と基多面体 $\mathrm{B}(f)$ は図 1 のように表される．

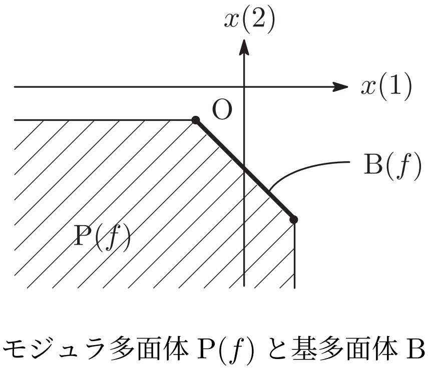

図 1. 劣モジュラ多面体 $\mathrm{P}(f)$ と基多面体 $\mathrm{B}(f)$

命題 1. ベクトル $x \in \mathrm{P}(f)$ は，任意の $Y, Z \subseteq V$ に対して $x(Y) = f(Y)$，$x(Z) = f(Z)$ が成立するならば，$x(Y \cap Z) = f(Y \cap Z)$，$x(Y \cup Z) = f(Y \cup Z)$ を満たす．

証明. (1) 式および f の劣モジュラ性より，

$$\begin{aligned} x(Y \cap Z) + x(Y \cup Z) &= x(Y) + x(Z) \\ &= f(Y) + f(Z) \\ &\geq f(Y \cap Z) + f(Y \cup Z) \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ．さらに，ベクトル $x \in \mathrm{P}(f)$ は

$$x(Y \cap Z) \leq f(Y \cap Z), \tag{3}$$
$$x(Y \cup Z) \leq f(Y \cup Z) \tag{4}$$

を満たす．(2) 式が成り立つためには，(3), (4) 式において等号がつねに成立していなければならない．したがって，$x(Y \cap Z) = f(Y \cap Z)$，$x(Y \cup Z) = f(Y \cup Z)$ が成り立つ． □

二つのベクトル $x, y \in \mathbb{R}^V$ に対して，$x(v) \leq y(v)$ がすべての $v \in V$ について成り立つとき，$x \leq y$ と書く．ベクトル $x \in \mathrm{P}(f)$ は，任意のベクトル $y \in \mathrm{P}(f)$ に対して $x \leq y$ ならば $x = y$ であるとき，$\mathrm{P}(f)$ の極大ベクトルであるという．

命題 2. ベクトル $x \in \mathrm{P}(f)$ が $\mathrm{P}(f)$ の極大ベクトルであるための必要十分条件は，$x \in \mathrm{B}(f)$ となることである．

証明. $x \in \mathrm{B}(f)$ であるとき，x が $\mathrm{P}(f)$ の極大ベクトルとなることは自明である．そこで，x が $\mathrm{P}(f)$ の極大ベクトルならば，$x \in \mathrm{B}(f)$ となることを示す．

x が $\mathrm{P}(f)$ の極大ベクトルであるとき，すべての $v \in V$ に対して，$v \in Y_v$ となるような $Y_v \subseteq V$ が存在し，$x(Y_v) = f(Y_v)$ が成り立つ．$V = \bigcup_{v \in V} Y_v$ と表現できることから，命題 1 より，$x(V) = f(V)$ が成り立つ．したがって，$x \in \mathrm{B}(f)$ となる． □

劣モジュラ多面体 $\mathrm{P}(f)$ 上で，非負の重みベクトル $p \in \mathbb{R}^V$ に関する線形計画問題は，以下のように定式化される:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{v \in V} p(v)x(v) \\ \text{subject to} & x \in \mathrm{P}(f). \end{array}$$

この問題の最適解 x は p 最大基とよばれ，$x \in \mathrm{B}(f)$ となる．上の定式化において，制約式は陽に表現されてはいないが，この問題には $(2^n - 1)$ 個の制約式が存在する．したがって，n の数が大きくなると (例えば $n = 100$ 程度でも) 現実的な時間で解くことは困難となる．しかし，f の劣モジュラ性を利用することにより，効率的に解くことができる．

各成分 $p(v)$ のとる相異なる値を $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$ とし，$U_i = \{v \mid p(v) \geq p_i\}$ と定義する．U_i は図 2 のように表される．

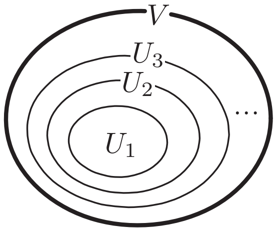

図 2. $U_i = \{v \mid p(v) \geq p_i\}$

次の命題は，p 最大基を特徴付けるものである．

命題 3. ベクトル $x \in \mathrm{B}(f)$ が p 最大基であるための必要十分条件は，すべての i に対して $x(U_i) = f(U_i)$ が成り立つことである．

証明. 双対問題

$$\begin{array}{lll} \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{Y \subseteq V} \xi(Y) f(Y) & \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{v \in Y \subseteq V} \xi(Y) = p(v) & v \in V \\ & \xi(Y) \geq 0 & Y \subseteq V,\ Y \neq V \end{array}$$

において，$\xi(V) = p_k$ とし，$i = 1, \ldots, k-1$ に対して $\xi(U_i) = p_i - p_{i+1}$ とする．その他の $Y \subseteq V$ に対しては $\xi(Y) = 0$ とする．このようにして得られた ξ は，双対問題の制約条件を満たし，実行可能解となる．ベクトル $x \in \mathrm{B}(f)$ が，すべての i に対して $x(U_i) = f(U_i)$ を満たすならば，x と ξ は相補性条件を満たし，ともに最適解となる．実際，ξ に関する相補性条件:

$$\text{任意の } Y \subseteq V \text{ に対して，} \xi(Y) > 0 \text{ ならば } x(Y) = f(Y)$$

が満たされるとき，

$$\begin{aligned} \sum_{Y \subseteq V} \xi(Y) f(Y) &= p_k f(V) + \sum_{i=1}^{k-1} (p_i - p_{i+1}) f(U_i) \\ &= p_k x(V) + \sum_{i=1}^{k-1} (p_i - p_{i+1}) x(U_i) = \sum_{v \in V} p(v) x(v) \end{aligned}$$

が成り立つ．このような $x \in \mathrm{B}(f)$ が存在することは，f の劣モジュラ性を用いて示される．一方，任意の p 最大基 x は，ξ に関する相補性条件を満たすことから，$x(U_i) = f(U_i)$ が成立する． □

2 劣モジュラ関数と凸関数の関係

本節では，劣モジュラ関数と凸関数の関連を明らかにした L. Lovász による命題について述べる．

V を有限集合とし，$n = |V|$ とする．2^V は n 次元超立方体 $Q = \{p \in \mathbb{R}^V \mid 0 \leq p(v) \leq 1\}$ の端点と対応させることができる．このとき，$f(\emptyset) = 0$ を満たす任意の集合関数 $f : 2^V \to \mathbb{R}$ に対して，それぞれの

端点に f の関数値が決められているものとする．さらに，端点以外にも f の値を決めることを考えるとき，それは三角形分割または単体分割によって行われる．

n 次元超立方体は，$n!$ 個の合同な n 単体に分割することができる．そして，それぞれの n 単体の端点以外での f の関数値は，端点の値を使うことにより線形補間をすることができる．このようにして得られた f の値は，n 次元超立方体において連続となる．

例えば，3 次元立方体は $3!$ $(= 6)$ 個の合同な四面体に分割することができる．図 3 における 3 次元立方体では，それら 6 個の四面体のうち，集合 $\emptyset$，$\{1\}$，$\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$ に対応する端点をもつ四面体 $P = \{p \in Q \mid p(1) \geq p(2) \geq p(3)\}$ が太線で示されている．

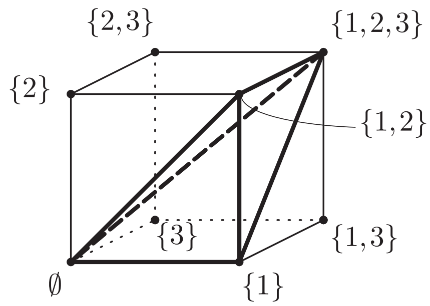

図 3．3 次元立方体

非負ベクトル $p \in [0,1]^V$ に対して，各成分 $p(v)$ のとる相異なる値を $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$ とし，$U_i = \{v \mid p(v) \geq p_i\}$ と定める．すると，正実数の列 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ が一意に存在して，

$$p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{U_i}$$

と表現することができる．このとき，$f(\emptyset) = 0$ を満たす任意の集合関数 $f : 2^V \to \mathbb{R}$ に対して，関数 $\hat{f} : \mathbb{R}_+^V \to \mathbb{R}$ を

$$\hat{f}(p) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(U_i)$$

で定める．この定義は，n 次元超立方体の端点以外の値を線形補間することに対応している．ここで，任意の $\alpha > 0$ に対して $\hat{f}(\alpha p) = \alpha \hat{f}(p)$ が成り立つことに注意する．

次の命題は，劣モジュラ関数と凸関数の関係について，1983 年に L. Lovász によって明らかにされたものである．

命題 4. 関数 f が劣モジュラであるための必要十分条件は，$\hat{f}$ が凸関数であることである．

証明. 関数 f が劣モジュラであるとき，命題 3 より，任意の $p \in \mathbb{R}^V$ に対して，

$$\hat{f}(p) = \max\left\{ \sum_{v \in V} p(v)x(v) \;\middle|\; x \in \mathrm{P}(f) \right\}$$

が成立する．したがって，$\hat{f}$ は凸関数になる．

任意の $\alpha > 0$ に対して $\hat{f}(\alpha p) = \alpha \hat{f}(p)$ が成り立つことに注意すると，関数 $\hat{f}$ が凸関数の場合，任意の $Y, Z \subseteq V$ に対して

$$\hat{f}(\chi_Y + \chi_Z) = 2 \cdot \hat{f}\left(\frac{\chi_Y + \chi_Z}{2}\right) \leq \hat{f}(\chi_Y) + \hat{f}(\chi_Z) = f(Y) + f(Z)$$

が成り立つ．一方，$\hat{f}$ の定義より，

$$\hat{f}(\chi_Y + \chi_Z) = \hat{f}(\chi_{Y \cap Z}) + \hat{f}(\chi_{Y \cup Z}) = \hat{f}(Y \cap Z) + \hat{f}(Y \cup Z).$$

したがって，f は劣モジュラ関数となる． □

命題 4 より，劣モジュラ関数は凸性をもった集合関数として理解することができる．凸関数の最小化は多項式時間で実行可能であることから，これは劣モジュラ関数の最小化も多項式時間で実行可能であることを意味している．