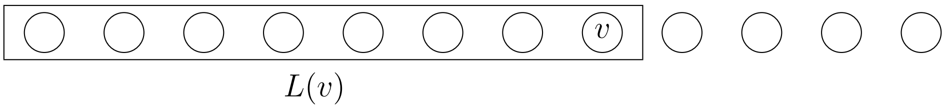
２００５年度 冬学期 離散情報論 ２００６年1月２３日

Lecture 11 （劣モジュラ関数 ２）

教員： 岩田 覚 助教授 文責： 上野 賢哉, 乾 義文

1 貪欲アルゴリズム

L を集合 V 上の線形順序とする．つまり, V の要素が下図のように順に並んでいるものとする．このとき, 一番最初の要素から v までの要素からなる集合を $L(v)$ とする.



これを用いて y を以下のように定義する：

$$y(v) = f(L(v)) - f(L(v) \setminus \{v\}) \ (v \in V).$$

このとき, 以下の定理が成り立つ.

定理 1. y は $B(f)$ の端点である.

Proof. まず, 任意の $X \subseteq V$ に対して $y(X) \leq f(X)$ となることを示す：

$$\begin{aligned} y(X) &= \sum_{v \in X} (f(L(v)) - f(L(v) \setminus \{v\})) \\ &\leq \sum_{v \in X} (f(X \cap L(v)) - f(X \cap L(v) \setminus \{v\})) \\ &= f(X). \end{aligned}$$

不等式は劣モジュラ性より成り立つ．つまり, $v \in X$ のもとで $X \cap L(v)$ と $L(v) \setminus \{v\}$ の和集合は $L(v)$, 共通部分は $X \cap L(v) \setminus \{v\}$ なので任意の $v \in X$ に対して

$$f(L(v)) + f(X \cap L(v) \setminus \{v\}) \leq f(X \cap L(v)) + f(L(v) \setminus \{v\})$$

が成り立つ．したがって, $y \in P(f)$ である.

また, $y(V) = f(V)$ より $y \in B(f)$ でもある．実際には,

$$\forall v \in V, \ y(L(v)) = f(L(v))$$

が成り立つので, n 本の独立な不等式が等号で成立する．これから y が端点であることが分かる. □

この定理より以下の系が導かれる.

系 2. 基多面体 $B(f)$ は空でない.

これは, 凸ゲームのコアの非空性を意味する.

2 最大最小定理

定理 3. $\min_{X \subset V} f(X) = \max\{z(V) \mid z \in P(f),\ z \leq 0\}$

Proof. $z \leq 0$ より任意の要素に対して z は 0 以下の値をとるので,$z(V) \leq z(X)$ である. また, $z \in P(f)$ より $z(X) \leq f(X)$ である. したがって, $z(V) \leq f(X)$ なので左辺の方が大きいことが分かる.

次に,

$$f^{\circ}(X) = \min\{f(Z) \mid Z \subset X\}$$

と定義すると f° は劣モジュラである. なぜなら,

$$\begin{aligned} f^{\circ}(X) &= f(X'),\ X' \subset X \\ f^{\circ}(Y) &= f(Y'),\ Y' \subset Y \end{aligned}$$

としたとき, f の劣モジュラ性と f° の定義より

$$\begin{aligned} f^{\circ}(X) + f^{\circ}(Y) &= f(X') + f(Y') \\ &\geq f(X' \cup Y') + f(X' \cap Y') \\ &\geq f^{\circ}(X \cup Y) + f^{\circ}(X \cap Y) \end{aligned}$$

が成り立つからである.

このとき, $f^{\circ}(X) \leq f(X)$ より

$$B(f^{\circ}) \subseteq P(f^{\circ}) \subset P(f)$$

$f^{\circ}(X) \leq f(\{\phi\}) = 0$ より

$$\forall X \subset V,\ f^{\circ}(X) \leq 0$$

となる. $B(f^{\circ})$ は空ではないことが分かっているので, この中から任意の要素 z を持ってきたとき

$$\forall z \in B(f^{\circ}),\ \forall v \in V,\ z(v) \leq 0$$

となるが, この z は $z \in P(f),\ z \leq 0$ を満たしており, $B(f^{\circ})$ に入っていることから

$$z(V) = f^{\circ}(V) = \min\{f(Z) \mid Z \subseteq V\}$$

なので等号が示された. □

この定理は, 次のような形で見ることもできる.

$$x^{-}(v) = \min\{0, x(v)\}$$

と定義したとき

$$x \in B(f) \Longrightarrow x^{-} \in P(f),\ x^{-} \leq 0$$

は明らかに成り立つ. 逆に,

$$z \in P(f),\ z \leq 0 \Longrightarrow \exists x \in B(f),\ x \geq z$$

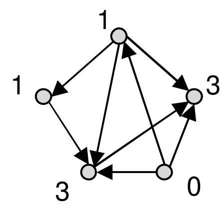
であることも言える．したがって, 以下のような等式が得られる．

$$\max\{z(V) \mid z \in P(f),\ z \leq 0\} = \max\{x^-(V) \mid x \in B(f)\} = \min_{X \subseteq V} f(X)$$

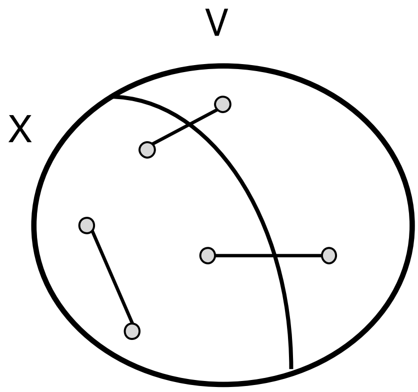
以上の議論から劣モジュラ最小化のアルゴリズムへと発展していくが, これに関しては授業では詳しく扱わないので以下の参考文献をあげておく [1, 2].

3 グラフの向き付け

グラフの向き付けを行うと各頂点の入次数が定まる．



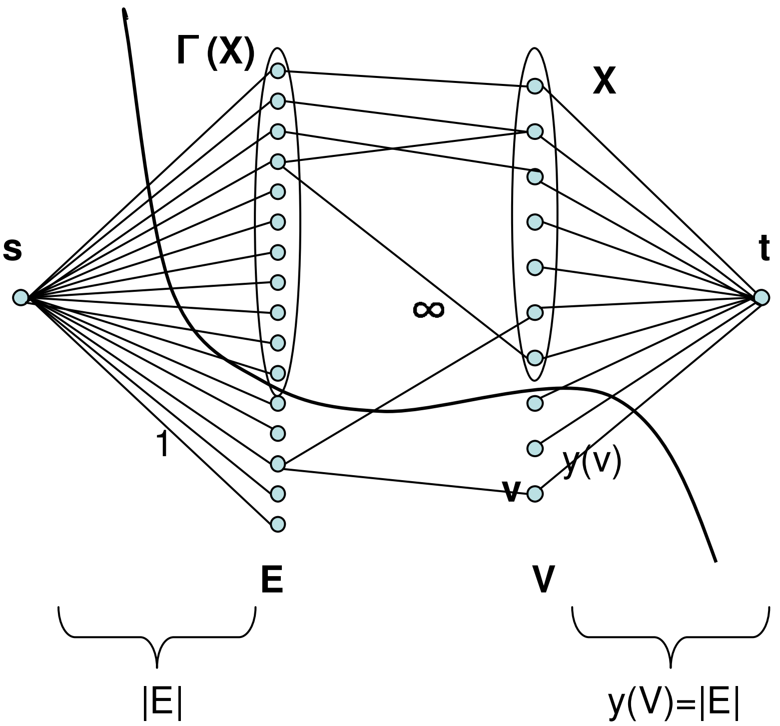
与えられた入次数列を達成す



点部分集合 $X \subseteq V$ に接続する枝の本数を $e(X)$ と書くと,

$$\begin{cases} \forall X \subseteq V, & y(X) \leq e(X) \\ & y(V) = |E| \end{cases}$$

が必要条件であることは明らか. 十分条件でもあることを示す.



E と V を頂点集合とし, 枝とその端点が隣接している 2 部グラフを考える. $X \subseteq V$ に接続する枝集合を $\Gamma(X)$ とすると, この条件は

$$\forall X \subseteq V, \quad |\Gamma(X)| - y(X) \geq 0$$

と言い換えられる. この条件が成立すれば向き付けが存在することを示す.

2 部グラフに 2 点 s, t を加え,s と $e \in E$ を容量 1 の枝,$v \in V$ と t を容量 $y(v)$ の枝で接続させてネットワークを構成する. 2 部グラフの枝の容量は向き付けにより ∞ か 0 のいずれか定めるものとする. 任意の X に対して上図のようなカットを考えると, その容量は 2 部グラフの枝を考えないとき $|\Gamma(X)| + y(V \backslash X) = |\Gamma(X)| + |E| - y(X)$ となる. この値は $|E|$ 以上となるため, 最大フロー最小カット定理より最大フローは最小カット容量である $|E|$ となる. このことは適当な向き付けにより各 $v \in V$ の入次数を $y(v)$ とできることを示している.

定理 4. 集合関数 e は劣モジュラ関数.

Proof. $m(X, Y)$ で X と Y を結ぶ枝の本数を表すことにする. このとき,

$$\begin{aligned}
e(X \cup Y) + e(X \cap Y) &= e(X) + e(Y \backslash X) - m(X, Y \backslash X) + e(X \cap Y) \\
&= e(X) + e(Y \backslash X) - (m(X \backslash Y, Y \backslash X) + m(X \cap Y, Y \backslash X)) + e(X \cap Y) \\
&= e(X) + (e(Y \backslash X) + e(Y \cap X) - m(Y \cap X, Y \backslash X)) - m(X \backslash Y, Y \backslash X) \\
&= e(X) + e(Y) - m(X \backslash Y, Y \backslash X) \\
&\leq e(X) + e(Y)
\end{aligned}$$

となる. □

参考文献

[1] A. Schrijver: A Combinatorial Algorithm Minimizing Submodular Functions in Strongly Polynomial Time. Journal of Combinatorial Theory, Series B 80 (2000), pp. 346-355.

[2] S. Iwata, L. Fleischer, S. Fujishige: A combinatorial strongly polynomial algorithm for minimizing submodular functions. Journal of the ACM, 48 (2001), pp. 761-777.

[3] L.S. Shapley: Cones of convex games. International Journal of Game Theory, 1 (1971), pp. 11-26.