| | |
|---|---|
| **2005 年度 冬学期 離散情報論** | 2005 年 1 月 30 日 |

# Lecture 12 (劣モジュラ関数 3)

| | |
|---|---|
| 教員： 岩田 覚 助教授 | 文責： 西鳥羽 二郎 |

## Nash-Williams の定理

$G=(V,E)$ を頂点集合 $V$, 枝集合を $E$ によるグラフとする．$v \in V$ に対して $d(v)$ は頂点 $v$ の次数を表す．$b: V \to \mathbb{Z}$ を $0 \le b(v) \le d(v)$, $v \in V$ を満たす関数とするとき次の定理が成立する．

**定理 1 (Nash Willams の定理).** *$G=(V,E)$ において次の二つは同値である．*

1. *連結な $b$ 分離が存在する．*
2. *$\forall X \subseteq V$, $b(X) \le e(X) - c(G \setminus X) + 1$. ただし, $b(X) = \sum_{v \in X} b(v)$, $e(X)$ を $X$ に接続する枝の本数, $c(G \setminus X)$ を $G$ から $X$ を削除した後の連結成分数とする．*

*Proof.*

- $1 \to 2$
  自明 (過去の Lecture 参照)
- $2 \to 1$
  $f(X) = e(X) - c(G \setminus X) + 1$ とする．この時 $f(\emptyset) = 0$, $f(V) = |E| + 1$ である．ここで次の補題が成立する．

  **補題 1.** *$f$ は劣モジュラ関数である．*

  *Proof.* $X, Y, Z \subseteq V, u, v \in V$ で $X = Z \cup \{u\}, Y = Z \cup \{v\}$ とする．$v \in V$, $e'(v)$ を $u$ から $Z$ 以外にでている枝の本数とする．$m$ を $u$ と連結だが $Z$ 及び $b$ と連結では無い連結成分の数, $n$ を $v$ と連結だが $Z$ 及び $u$ と連結では無い連結成分の数とする．

  1. $u$ と $v$ の間に枝が無く, $u$ と $v$ の両方と連結な頂点集合が無い場合.

$$
\begin{aligned}
f(X) + f(Y) &= e(Z) + e'(u) - c(G \setminus (Z \cup \{u\}) + 1 \\
&\quad + e(Z) + e'(v) - c(G \setminus (Z \cup \{v\})) + 1 \\
&= 2e(Z) + e'(u) + e'(v) - n - m \\
f(X \cup Y) + f(X \cup Y) &= e(Z) + e'(u) + e'(v) - c(G \setminus (Z \cup \{u\} \cup \{v\}) + 1 \\
&\quad + e(Z) - c(G \setminus Z) + 1 \\
&= 2e(Z) + e'(u) + e'(v) - n - m
\end{aligned}
$$

したがって

$$(f(X) + f(Y)) - f(X \cup Y) + f(X \cup Y) = 0$$

  2. $u$ と $v$ の間に枝が無く, $u$ と $v$ 両方と連結な頂点集合が $k(\ge 1)$ 個存在する場合.

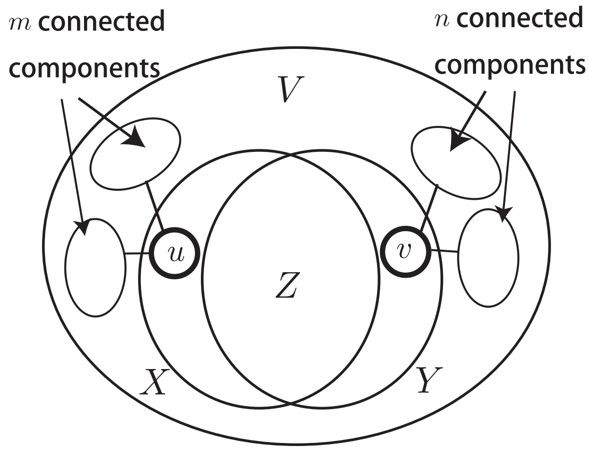


図１　$v$ と $u$ の間に枝が無く, $u$ と $v$ の両方と連結な頂点集合が無い場合

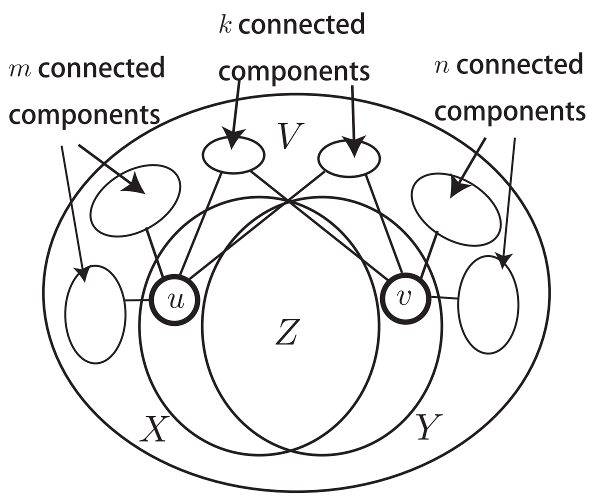


図２　$u$ と $v$ の間に枝が無く, $u$ と $v$ 両方と連結な頂点集合が $k(\geq 1)$ 個存在する場合.

$$
\begin{aligned}
f(X)+f(Y) &= e(z)+e'(u)-c(G\setminus(Z\cup\{u\})+1 \\
&\quad e(Z)+e'(v)-c(G\setminus(Z\cup\{v\}))+1 \\
&= 2e(Z)+e'(u)+e'(v)-n-m \\
f(X\cup Y)+f(X\cup Y) &= e(Z)+e'(u)+e'(v)-c(G\setminus(Z\cup\{u\}\cup\{v\})+1 \\
&\quad e(Z)-c(G\setminus Z)+1 \\
&= 2e(Z)+e'(u)+e'(v)-n-m-k+1
\end{aligned}
$$

したがって

$$(f(X)+f(Y))-f(X\cup Y)+f(X\cup Y)\geq k-1$$

3. $u$ と $v$ の間に枝が存在し, $u$ と $v$ 両方と連結な頂点集合が $k(\geq 0)$ 個存在する場合.

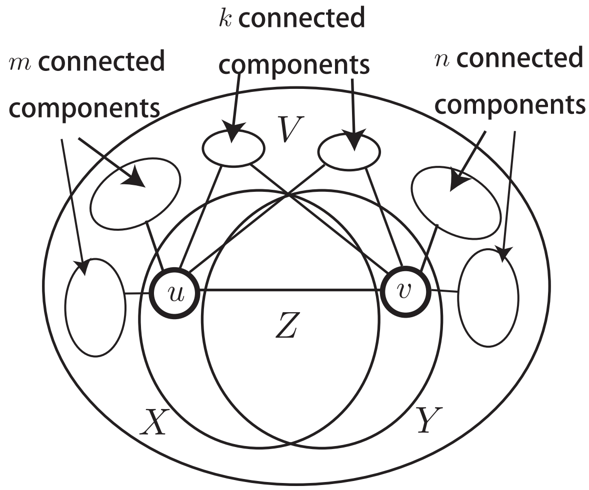


図 3　$u$ と $v$ の間に枝が存在し, $u$ と $v$ 両方と連結な頂点集合が $k(\geq 0)$ 個存在する場合.

$$
\begin{aligned}
f(X)+f(Y) &= e(z)+e'(u)-c(G\setminus(Z\cup\{u\})+1\\
&\quad e(Z)+e'(v)-c(G\setminus(Z\cup\{v\}))+1\\
&= 2e(Z)+e'(u)+e'(v)-n-m\\
f(X\cup Y)+f(X\cup Y) &= e(Z)+e'(u)+e'(v)-c(G\setminus(Z\cup\{u\}\cup\{v\})+1\\
&\quad e(Z)-c(G\setminus Z)+1\\
&= 2e(Z)+e'(u)+e'(v)-n-m-k+2
\end{aligned}
$$

したがって

$$(f(X)+f(Y))-f(X\cup Y)+f(X\cup Y)\geq k$$

□

したがって定理 1 の 2 は $b\in P(f)$($P$:劣モジュラ多面体) と同値であるため,

$$b\in P(f)\rightarrow \exists \text{連結 } b \text{ 分離}$$

を示す.

$$
\begin{aligned}
&f(\emptyset)=0,\\
&f(V)=|E|+1,\\
&\forall X\subsetneq V, f(X)\leq e(X) \quad \because f(X)=e(X)-c(G\setminus X)+1
\end{aligned}
$$

$b\in P(f)$ であるから, $\exists h\in B(f)$, $h\geq b$ ($B$:基多面体). ここで $r\in V$ を任意に選んで固定する. $y=h-X_r$ とすると $y(V)=|E|$ となる.
また,

$$
\begin{aligned}
&y(X)\leq h(X)\leq f(X)\leq e(X), \forall X\subsetneq V\\
&y(V)=|E|=e(V)
\end{aligned}
$$

であるから

$$y\in B(e)$$

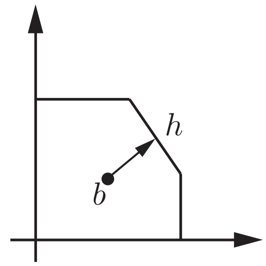


図 4　$\exists h \in B(f),\ h \geq b$

である．このため，入次数が $y$ に一致する向きづけが存在する．
$r$ から到達可能な点集合を $X$ とする．

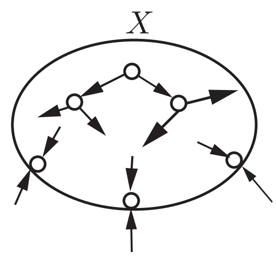


図 5　$X$ から外にでる枝は無い

$$y(X) = e(X) \leq h(X) - 1 \leq f(X)$$

であるから，$X = V$ である．したがって $V$ の全ての点は到達可能であるため，$r$ を根とする有向全域木 $T$ が存在する．
各点 $v \in V$ において $E \setminus T$ の枝で $v$ を終端とする枝が $h(v) - 1 (\geq b(v) - 1)$ 本存在する．したがって分離可能である．

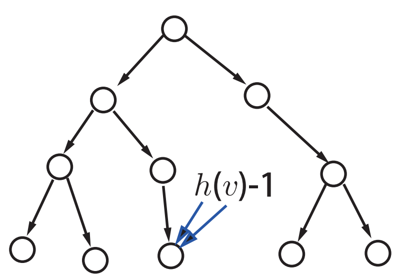


図 6　各頂点 $v$ には $v$ を終点とする $h(v) - 1$ 本の $E \setminus T$ の枝が存在する．

以上より定理 1 が成立する．　□

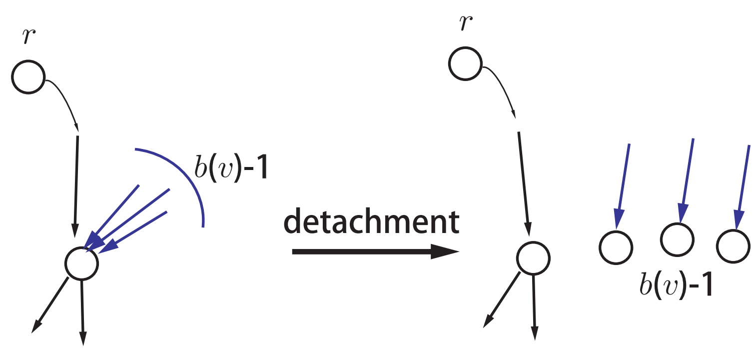


図 7　分離してできた頂点は終点であり, その親は $r$ から到達可能である.