

§0. 概要

様々な組合せ最適化問題が行列の正則性を判定したり階数を計算する問題として表現できるということを見る。

レポート: 3問以上選択し解答、ITC-LMSでPDFファイルを提出。

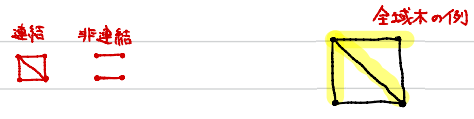
日付: 2021年11月12日(金) 17:00 (JST)

§1. グラフの連結性

$G = (V, E)$: 無向グラフ

G が **連結** (connected) $\iff$ 任意の $u, v \in V$ 間にパスがある。

$T \subseteq E$ が G の **全域木** (spanning tree) $\iff T$ は木(連結・閉路なし), かつ全ての頂点を端点に含む



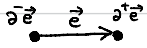
Prop 1 G が連結 $\iff G$ は全域木をもつ。

Prop 2 G の全ての全域木 T のサイズは $|T| = |V| - 1$

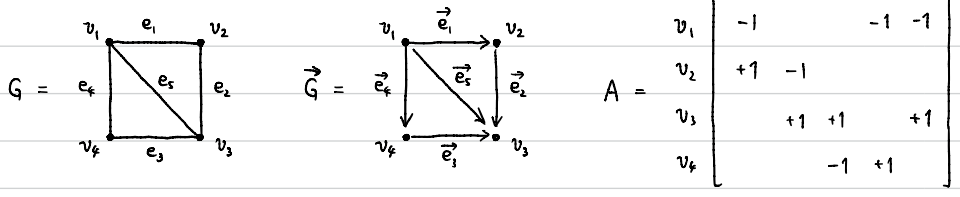
$\vec{G} = (V, \vec{E})$: G の適当な向きづけ ($\vec{e} \in \vec{E}$ は $e \in E$ の向きづけ)

$\vec{G}$ の **接続行列** (incidence matrix) $A = (A_{v,e})_{v \in V, e \in E} \in \mathbb{R}^{V \times E}$ 行 $\leftrightarrow$ 頂点, 列 $\leftrightarrow$ 辺

$$A_{v,e} := \begin{cases} +1 & (\partial^+ \vec{e} = v) \\ -1 & (\partial^- \vec{e} = v) \\ 0 & (\text{o.w.}) \end{cases}$$



例



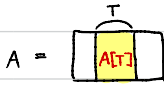
Prop 3 $\text{rank } A \leq |V| - 1$.

⊙ 全行を足すと 0 //

Thm 4 G が連結 $\Leftrightarrow \text{rank } A = |V| - 1$.

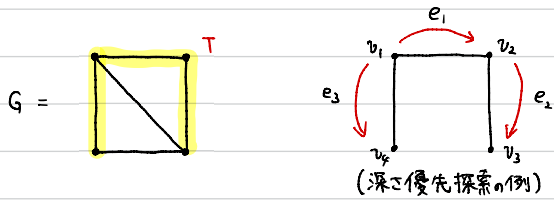
☺ G が連結 $\Leftrightarrow G$ は全域木 $T \subseteq E$ をもつ.

$A[T]$ を列集合が T である A の部分行列としたとき, $\text{rank } A[T] = |V| - 1$ を示す.



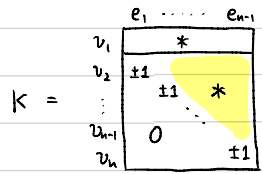
頂点 v_i を適当に定め, v_i を根として T 上の探索 (深さ・幅優先など) を行い ($\vec{G}$ における向きは無視)

訪れた頂点の順序を $v_1, v_2, \dots, v_n$, 辺の順序を $e_1, \dots, e_{n-1}$ とする. ($n := |V|$)



$A[T]$ の各行を $v_1, \dots, v_n$, 各列を $e_1, \dots, e_{n-1}$ の順で並び替えて得られる行列を K とすると,

K は次のような構造をもつ.



$v_i \xrightarrow{e_i} v_j$ という順で探索したとき $i < j$.

$$\therefore \text{rank } A \geq \text{rank } A[T] = \text{rank } K \geq \text{rank } \begin{bmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{bmatrix} = |V| - 1 \quad //$$

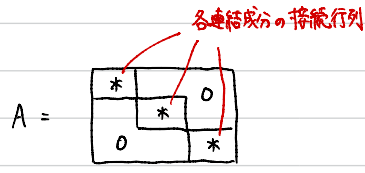
(追記) G が非連結ならば A は各連結成分の接続行列を対角に並べた行列となるので階数が2以上落ちる.

Cor 5 A から任意の $v \in V$ に対応する行を抜いた行列を A_v とすると,

全域木 $T \subseteq E$ に対し $\det A_v[T] \in \{+1, -1\}$

Cor 6 G の連結成分の数 $= n - \text{rank } A$

☺ 各連結成分毎に A の階数が1ずつ落ちる. //

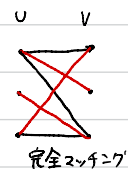
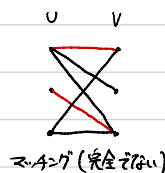
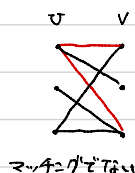


§2 二部マッチング

$G = (U, V; E)$: 二部グラフ

$M \subseteq E$ が **マッチング** (matching) $\Leftrightarrow M$ の各辺の端点が全て相異なる

マッチング M が **完全** (perfect) $\Leftrightarrow$ 全ての頂点が M の端点に含まれる



Prop 7 M が G の完全マッチングならば $|M| = |U| = |V|$.

G の **Edmonds 行列** (Edmonds matrix) $N = (N_{u,v})_{u \in U, v \in V}$

$$N_{u,v} := \begin{cases} x_{u,v} & (\{u,v\} \in E) \quad \dots \text{変数 (記号)} \\ 0 & (\text{o.w.}) \end{cases}$$

N は $|E|$ 変数の多項式行列. (各要素が多項式である行列)

一般に, 多項式行列 $P = P(x_1, \dots, x_m)$ に対し, $\text{rank } P := \max \{ \text{rank } P(a_1, \dots, a_m) \mid a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R} \}$ とする.

また $n \times n$ の P が **正則** (nonsingular) $\Leftrightarrow \text{rank } P = n$ とする. (有理関数体 $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_m)$ 上の行列としての階数)

Thm 8 $n := |U| = |V|$ とする. G が完全マッチングをもつ $\Leftrightarrow N$ が正則

☺ $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ とする.

$$\det N = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n N_{u_i, v_{\sigma(i)}}$$

$$\text{よって} \prod_{i=1}^n N_{u_i, v_{\sigma(i)}} \begin{cases} \neq 0 & \text{if } \{u_i, v_{\sigma(i)}\} \in E \text{ for } \forall i=1, \dots, n \Leftrightarrow \{u_i, v_{\sigma(i)}\}_{i=1, \dots, n} \text{ は完全マッチング} \\ = 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

もし G に完全マッチングなければ, $\det N$ の右辺に非0の項が1つも現れないので $\det N = 0$.

もし G が完全マッチングをもていけば, $\det N$ の右辺には非0項が現れ,

また, 各非0項は相異なる変数の単項式なのでキャンセルしない. //

$$N = X \begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline N[X,Y] \\ \hline \end{array}$$

Cor 9 $\text{rank } N = \max \{ |M| \mid M \text{ は } G \text{ の マatching} \}$

$$\begin{aligned} \odot \text{ rank } N &= \max \{ |R| \mid \exists X \subseteq U, Y \subseteq V \text{ s.t. } |X| = |Y| = |R|, N[X,Y] \text{ は 正則} \} \\ &= \max \{ |R| \mid \exists X \subseteq U, Y \subseteq V \text{ s.t. } G \text{ は } X-Y \text{ 間の 完全 matching をもつ} \} \\ &= (\text{右辺}) \quad // \end{aligned}$$

変数を含む行列の階数は 変数に乱数を代入すると高確率で求まる。... レポート

§3 線形マトロイド

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

列集合を E とする。 ($|E| = m$)

$I \subseteq E$ が **独立** (independent) $\Leftrightarrow \text{rank } A[I] = |I|$

$B \subseteq E$ が **基** (base) $\Leftrightarrow B$ は独立, かつ $|B| = n$ (つまり, $A[B]$ が正則)

$$\mathcal{B}(A) := \{ B \subseteq E \mid B \text{ は } A \text{ の 基} \}$$

$$A = \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline A[I] \\ \hline \end{array}$$

例 A : 無向グラフ $G = (V, E)$ の 任意の向きづけの 接続行列

A_r : A から $r \in V$ に対応する行を除いた行列

$$\Rightarrow \mathcal{B}(A_r) = \{ T \subseteq E \mid T \text{ は } G \text{ の 全域木} \} \quad \dots \text{ レポート}$$

Prop 12 A が 基 をもつ $\Leftrightarrow A$ は 行フルランク ($\text{rank } A = n$)

$\odot \text{ rank } A$ は A の 線形独立な列ベクトルの 最大本数 に 等しいので。 //

例と併せると Prop 12 は 全域木の存在判定 (連結性判定) を 階数計算 に 帰着する Thm 4 の 拡張とみなせる。

* 基を $\text{rank } A[B] = n$ ではなく $\text{rank } A[B] = \text{rank } A$ として定義するやり方が 本来は 一般的。この定義では A は 常に 基をもつ。

§4 線形マトロイド交差

$A^+, A^- \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $E: A^+$ と A^- の共通の列集合

共通基 $B \in \mathcal{B}(A^+) \cap \mathcal{B}(A^-)$ を求めたり存在判定したりする問題を線形マトロイド交差 (linear matroid intersection) という。

$$A^+ = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & B & \\ \hline & \text{正則} & \\ \hline \end{array}$$

$$A^- = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \text{正則} & \\ \hline \end{array}$$

様々な組合せ最適化問題が線形マトロイド交差として表現できる。

- ・ 全域木 ($A^+ = A^- = A_n$)
- ・ カラフル全域木
- ・ 二部マッチング ... レポート
- ・ (有向/無向) 点素 S - T パス
- ・ 有向全域木

$x_e (e \in E)$: 変数

$D = \text{diag}(x_e)_{e \in E}$: x_e を対角に並べた $E \times E$ の対角多項式行列

$$\square := A^+ D A^{-T} = \sum_{e \in E} a_e^+ a_e^{-T} x_e \quad \left(A^+ = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & e & \\ \hline & a_e^+ & \\ \hline \end{array}, A^- = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & e & \\ \hline & a_e^- & \\ \hline \end{array} \right)$$

Thm 13 (A^+, A^-) が共通基をもつ $\iff \square$ が正則。

このThmの証明には次のBinet-Cauchyの公式を用いる。

Lemma 14 (Binet-Cauchy)

$X \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $E := X$ の列集合 = Y の行集合

$$\Rightarrow \det XY = \sum_{S \in \binom{E}{n}} \det X[S] \det Y[S]$$

$$\uparrow \binom{E}{n} := \{S \subseteq E \mid |S| = n\}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline E \\ \hline X \\ \hline \end{array} \quad E \quad \begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline S \\ \hline X[S] \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline Y[S] \\ \hline \end{array}$$

⊙ $n > m$ の場合は XY : 非正則 より (左辺) = 0. 右辺も $\binom{E}{n} = \emptyset$ より 0.

以上 $n \leq m$ を仮定.

$$\det(zI_m + YX) = \det \begin{pmatrix} zI_m + YX & Y \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} zI_m & Y \\ -X & I_n \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{右列} \times X \text{ を引く (基本変形)} \\ \text{左列} \times X \text{ を足す} \end{array} \right) = \det \begin{pmatrix} zI_m & Y \\ 0 & I_n + z^{-1}XY \end{pmatrix}$$

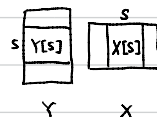
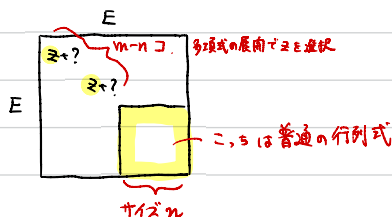
$$= z^m \det(I_n + z^{-1}XY) = z^{m-n} \det(zI_n + XY)$$

$$\therefore z^{m-n} \det(zI_n + XY) = \det(zI_m + YX) \quad (z=1 \text{ の場合を Sylvester's determinant identity というらしい})$$

この式の両辺の z^{m-n} の係数を比較する.

左辺: 係数 = $\det(zI_n + XY)$ の定数項 = $\det XY$

右辺: 行列式の各項の展開を考えると次のような項が z^{m-n} の係数に寄与する.



$$\text{係数} = \sum_{S \subseteq \left(\frac{E}{n}\right)} \det(YX)[S, S] = \sum_{S \subseteq \left(\frac{E}{n}\right)} \det(Y[S]X[S]) = \sum_{S \subseteq \left(\frac{E}{n}\right)} \det Y[S] \det X[S] \quad //$$

$\downarrow$
Sはindexをたまたま主小行列

Thm 13の証明

$\square := A^+ DA^{-T}$ に $X = A^+$, $Y = DA^{-T}$ として Cauchy-Binet の公式を適用すると

$$\begin{aligned} \det \square &= \sum_{S \in \left(\frac{E}{n}\right)} \det A^+[S] \det (DA^{-T})[S] = \sum_{S \in \left(\frac{E}{n}\right)} \det A^+[S] \det A^{-}[S] \prod_{e \in S} x_e \\ &= \sum_{B \in \mathcal{B}(A^+) \cap \mathcal{B}(A^-)} \det A^+[B] \det A^{-}[B] \prod_{e \in B} x_e \quad (\text{共通基の項だけ残る}) \end{aligned}$$

よて共通基がない場合は $\det \square = 0$.

共通基が1つ以上ある場合, 各項の和は $\prod_{e \in B} x_e$ のお陰でキャンセルしないので $\det \square \neq 0$. //

Thm 13の一般化として $\text{rank } \square = \max \{ |I| \mid I \subseteq E \text{ は } A^+ \text{ でも } A^- \text{ でも独立} \}$ が成立する. ... レポート

§5 DAG 上の点素 S-T パス (発展; 時間 $\mathcal{O}(k \cdot |E|)$)

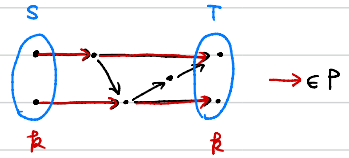
$D = (V, A) : \text{DAG (有向閉路がない有向グラフ)}$

$S, T \subseteq V, S \cap T = \emptyset, |S| = |T| = k$

$P \subseteq A$ が D の点素 S-T パス (node-disjoint S-T path)

$\Leftrightarrow P$ は k 本の有向路 $p_1, \dots, p_k \subseteq A$ の和集合で,

- 異なる路は同じ頂点を共有しない (点素)
- 各路は S から T へ至る



$x_a (a \in A) : \text{変数}$

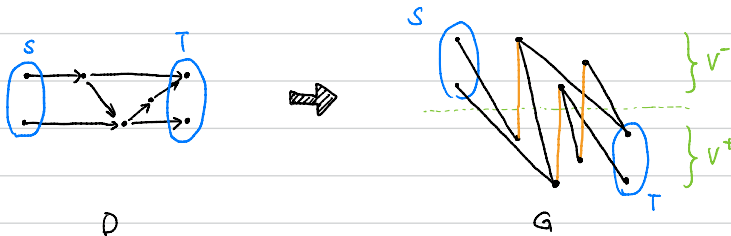
行列 $\Omega = (\Omega_{st})_{s \in S, t \in T}$ を $\Omega_{st} := \sum_{p: s \rightarrow t \text{ 有向路}} \prod_{a \in p} x_a$ と定める.

Thm 15 D が点素 S-T パスをもつ $\Leftrightarrow \Omega$ が正則

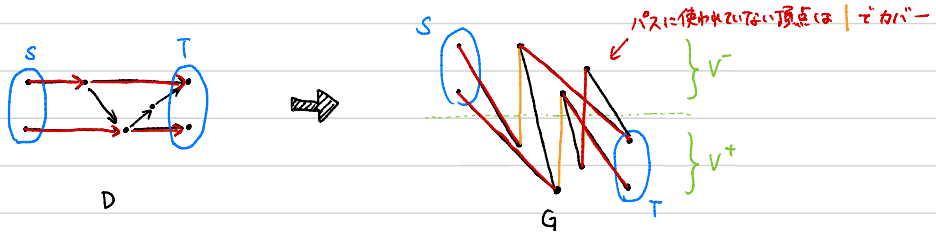
😊 まず "点素 S-T パス問題" を二部マッチング問題に帰着する。

$V := V \setminus (S \cup T)$ として二部グラフ $G = (V^-, V^+; E_1 \cup E_2)$ を次のように構成する:

- $V^- := \{v^- \mid v \in S \cup V\}$
- $V^+ := \{v^+ \mid v \in T \cup V\}$
- $E_1 := \{\{v^-, w^+\} \mid (v, w) \in E, u \notin T, v \notin S\}$
- $E_2 := \{\{u^-, u^+\} \mid u \in V\}$



よく考えると D の点素 S - T パスと G の完全マッチングは 一対一対応する。



G の Edmonds 行列を $N = N(y)$ ($y = (y_e)_{e \in E}$) とすると

$$\det N = \sum_{M: \text{完}} \pm \prod_{e \in M} y_e = \sum_{P: \text{点素 } S-T \text{ パス}} \pm \prod_{(u,v) \in P} y_{uv^+} \prod_{u \in U \setminus V(P)} y_{uw^+}$$

後の都合でマウス

$V(P)$: P が訪れる頂点集合

$$y_e \leftarrow \begin{cases} -x_{uv} & (e = \{v^-, w^+\} \in E_1) \\ 1 & (e \in E_2) \end{cases} \quad \text{として得られる行列を } \tilde{N} \text{ とすると}$$

$$\det \tilde{N} = \sum_{P: \text{点素 } S-T \text{ パス}} \pm \prod_{a \in P} x_a \quad \text{より } D \text{ に点素 } S-T \text{ パスが存在} \Leftrightarrow \tilde{N} \text{ が正則.}$$

$\tilde{N}$ の行と列は $\begin{matrix} & T & U \\ S & \boxed{} & \boxed{} \\ U & \boxed{} & \boxed{} \end{matrix}$ という感じで index される。

突然だが $k=1$ ($S=\{s\}, T=\{t\}$) の場合に $\det \tilde{N}$ の展開項の符号がどうなるか考える。

完全マッチング M を固定. 対応する s - t 路を P とし, $V(P) \setminus \{s, t\}$ の頂点を P が訪れる順に並べ替える

$$\tilde{N} = \begin{matrix} & t & V(P) \setminus \{s, t\} & \text{その他} \\ S & \boxed{-x_s} & \boxed{-x_{s_1}} & \boxed{-x_{s_2}} \\ V(P) \setminus \{s, t\} & \boxed{-x_{t_1}} & \boxed{-x_{t_2}} & \boxed{-x_{t_3}} \\ \text{その他} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{matrix} \quad \bullet \in M$$

となる。(列と行を同じ置換で並べかえるので、この操作で符号は変わらない)

置換の符号は $(-1)^{|V(P)|-1}$

$$\therefore \det \tilde{N} = \sum_{P: s \rightarrow t \text{ パス}} (-1)^{|V(P)|-1} \prod_{x_a \in P} (-x_a) = - \sum_{P: s \rightarrow t \text{ パス}} \prod_{x_a \in P} x_a = -\Omega_{st}$$

一般の k の場合に戻る.

$$\tilde{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} T & U \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ U \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline X & Y \\ \hline Z & W \\ \hline \end{array} \end{array}$$

とすると, 実は $\det W = 1$ (全て $\downarrow$ の辺を取る以外の路で W に移動)

$$\det \tilde{N} = \det \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X - YW^{-1}Z & Y \\ 0 & W \end{pmatrix} = \det(X - YW^{-1}Z)$$

$\nwarrow$ 2列 $\times W^{-1}Z$ を引く $\nwarrow$ SXT

よって $\tilde{N}$ が正則 $\iff X - YW^{-1}Z$ が正則.

$$\begin{aligned} X - YW^{-1}Z \text{ の } (s, t) \text{ 成分} &= X_{s,t} - Y[\{s\}, V \setminus \{s, t\}] W^{-1} Z[V \setminus \{s, t\}, \{t\}] \\ &= \det \begin{pmatrix} X_{s,t} & Y[\{s\}, V \setminus \{s, t\}] \\ Z[V \setminus \{s, t\}, \{t\}] & W \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この $\det$ は $S = \{s\}, T = \{t\}$ の場合の $\tilde{N}$ なので $-\Omega_{st}$ と等しい.

$$\therefore X - YW^{-1}Z \text{ の } (s, t) \text{ 成分} = -\Omega_{st}$$

$$\Rightarrow X - YW^{-1}Z = -\Omega //$$

もっと符号のことをまじめに考えると次の **LGV補題** (Lindström-Gessel-Viennot lemma) が示せる.

Thm 16 $S = \{s_1, \dots, s_k\}, T = \{t_1, \dots, t_k\}$

点素 $S \rightarrow T$ パス P の符号 $\text{sgn } P$ を, P を $S \rightarrow T$ の置換としてみたときの符号として定める. → レポート

$$\Rightarrow \det \Omega = \sum_{P: \text{点素 } S \rightarrow T \text{ パス}} \text{sgn } P \prod_{a \in P} x_a$$

